

Module #9

Estimation de la fiabilité des systèmes

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
 Polytechnique Montréal



Section 14.3.2 - A. Der Kiureghian (2005). *First- and second-order reliability methods*. Chapter 14 in Engineering design reliability handbook, CRC Press, Boca Raton, FL.

Terminologie

Composante: Élément considéré comme indivisible et pour lequel on peut effectuer une analyse de fiabilité. (e.g. une membrure dans une poutre en treillis)

Système: Assemblage de composantes

État d'un système: Dans le contexte du calcul de la fiabilité un système peut être dans l'un des deux états suivants:
{**Survie**, **Défaillance**}

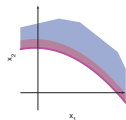


Classes de problèmes

Fiabilité d'une composante:

$g_i(\mathbf{x})$ est continue et dérivable

$g_1(\mathbf{X})$

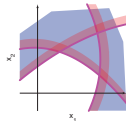


Fiabilité d'un système en série

$$g(\mathbf{x}) = \min[g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]$$

$g_m(\mathbf{X})$

$g_2(\mathbf{X})$
 $g_1(\mathbf{X})$

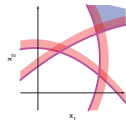


Fiabilité d'un système en parallèle

$$g(\mathbf{x}) = \max[g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]$$

$g_1(\mathbf{X})$

$g_m(\mathbf{X})$



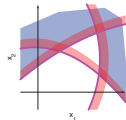
Fiabilité d'un système

$$g(\mathbf{x}) = \min \left\{ \max_{i \in C_1} [g_i(\mathbf{x})], \dots, \max_{i \in C_k} [g_i(\mathbf{x})] \right\}$$

$g_m(\mathbf{X})$

$g_2(\mathbf{X})$

$g_1(\mathbf{X})$



Problématique

Comment **formuler** les problèmes de fiabilité des **systèmes** et comment estimer leur **probabilité de défaillance**?

Plan du module #9

Introduction
Nomenclature
Formulation
Approx. FORM
Monte-Carlo
Résumé

Organisation de la matière

<i>Théorie probabilité</i>	{	0	Révision algèbre & probabilités	
		1	Lois de probabilités	 
		3	PDF multivariés	 
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	{		Introduction	
		2	Formulation fiabilité composantes	$g_1(X)$ 
		9	Formulation fiabilité systèmes	
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	{	4	Monte Carlo	 
		12	Échantillonnage par importance	  
<i>Estimation – p_f analytique</i>	{	5	FOSM	  
		6	FORM	  
		8	SORM	  
<i>Utilisation des résultats</i> 	{	7	Analyse de sensibilité	
		10	Incertitudes aléatoires & épistémiques	
		11	Données empiriques	 
		13	Prise de décision	
		14	Métamodèles & modèles empiriques	



Plan de la section

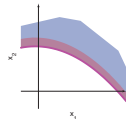
Nomenclature

- 2.1 Composantes
 - 2.2 Système en série
 - 2.3 Système en parrallèle
 - 2.4 Système série+parrallèle
 - 2.5 Ensembles de survie
-

État des composantes et systèmes - Composantes

$g_i(\mathbf{x})$ est continue et dérivable

$g_1(\mathbf{X})$



La variable s_i décrit l'état d'une **composante**

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

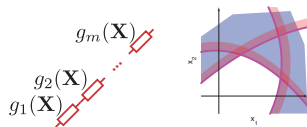
La variable s_{sys} décrit l'état d'un **système**

$$s_{\text{sys}} = \begin{cases} 0, & \text{(Défaillance du système)} \\ 1, & \text{(Survie du système)} \end{cases}$$

État des composantes et systèmes - Série

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

$$g(\mathbf{x}) = \min[g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]$$



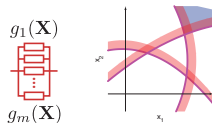
La variable s_{sys} décrit l'état d'un système

$$s_{\text{sys}} = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_m = \min(s_1, \dots, s_m)$$

État des composantes et systèmes - parallèle

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

$$g(\mathbf{x}) = \max[g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]$$



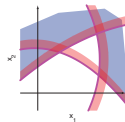
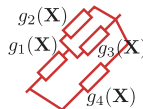
La variable s_{sys} décrit l'état d'un système

$$s_{\text{sys}} = 1 - [(1 - s_1)(1 - s_2) \dots (1 - s_m)] = \max(s_1, \dots, s_m)$$

État des composantes et systèmes - Général

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

$$g(\mathbf{x}) = \min \left\{ \max_{i \in \mathcal{C}_1} [g_i(\mathbf{x})], \dots, \max_{i \in \mathcal{C}_k} [g_i(\mathbf{x})] \right\}$$



Ensembles de survie ($\mathcal{C}_k$): $\{1, 4\}, \{2, 3, 4\}$

La variable s_{sys} décrit l'état d'un système

$$\begin{aligned} s_{\text{sys}} &= [1 - (1 - s_1)(1 - s_4)] \times [1 - (1 - s_2)(1 - s_3)(1 - s_4)] \\ &= \min [\max(s_1, s_4), \max(s_2, s_3, s_4)] \end{aligned}$$

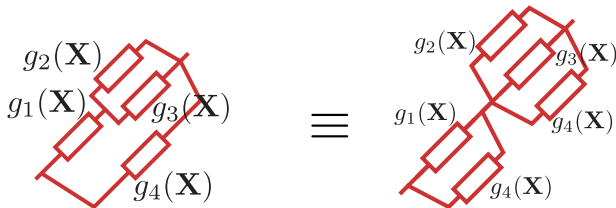
Ensembles de survie

Ensemble de survie ($\mathcal{C}$): ensemble de composantes pour lesquelles une défaillance simultanée entraîne la défaillance du système.

Ensemble de survie minimal ($\mathcal{C}_{\min}$): ensemble minimal de composantes (système en parallèle) pour lesquelles une défaillance simultanée entraîne la défaillance du système.

Ensembles de survie disjoints ($\mathcal{C}_{\text{disjoint}}$): ensembles de survie mutuellement exclusifs.

Example #9.1



Ensembles de survie:

$$\mathcal{C} = \{(1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4), (1, 2, 3, 4)\}$$

Ensembles de survie minimaux: $\mathcal{C}_{\min} = \{(1, 4), (2, 3, 4)\}$

Ensembles de survie disjoints:

$$\mathcal{C}_{\text{disjoint}} = \{(1, 4, \bar{2}, \bar{3}), (1, 2, 4, \bar{3}), (1, 3, 4, \bar{2}), (2, 3, 4, \bar{1}), (1, 2, 3, 4)\}$$



Plan de la section

Formulation

- 3.1 Ensemble de survie minimal
 - 3.2 Inclusion-exclusion
 - 3.3 Estimation de $p_{f,\text{sys}}$ - composantes indépendantes
-

Ensemble de survie minimal

La variable s_i décrit l'état d'une **composante**

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

Ensemble de survie minimal

$$C_{\min,k}(\mathbf{x}) = \underbrace{\left\{ \bigcap_{i \in C_{\min,k}} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \right\}}_{\text{système en parallèle}} = 1 - \prod_{i \in C_{\min,k}} (1 - s_i)$$

La défaillance d'un **ensemble de survie minimal** entraîne la défaillance du système.

État d'un système - Ensembles de survie minimaux

La variable s_{sys} décrit l'état d'un **système**

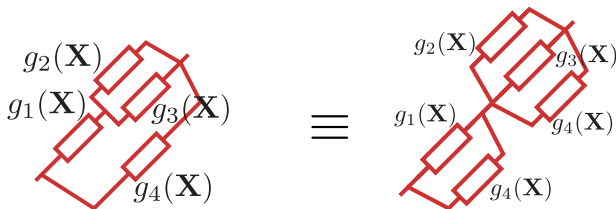
$$s_{\text{sys}} = \begin{cases} 0, & \text{(Défaillance du système)} \\ 1, & \text{(Survie du système)} \end{cases}$$

$$s_{\text{sys}} = \bigcup_{k=1}^K \left\{ \bigcap_{i \in \mathcal{C}_{\min,k}} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(a) composante} \\ \text{(b) ensemble de} \\ \text{survie minimal} \\ \text{(parrallèle)} \end{array}$$

$$= \prod_{k=1}^K \mathcal{C}_{\min,k}(\mathbf{x}) = \underbrace{\prod_{k=1}^K \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{C}_{\min,k}} (1 - \underbrace{s_i}_{(a)}) \right]}_{(b)} \quad \begin{array}{l} \text{(c) système} \\ \text{(Série)} \end{array}$$

(c)

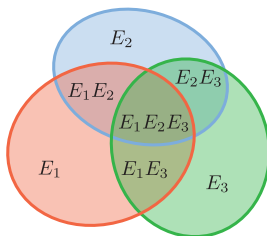
Example #9.1 (cont.)



$$\begin{aligned}
 s_{\text{sys}} &= \prod_{k=1}^K \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{C}_{\min,k}} (1 - s_i) \right], \quad (K = 2) \\
 &= [1 - (1 - s_1)(1 - s_4)] \times [1 - (1 - s_2)(1 - s_3)(1 - s_4)] \\
 &= s_4 + s_1 s_2 + s_1 s_3 - s_1 s_2 s_3 - s_1 s_2 s_4 - s_1 s_3 s_4 + s_1 s_2 s_3 s_4
 \end{aligned}$$

Probabilité de défaillance - Cas général

$$p_{f,\text{sys}} = \Pr \left(\bigcup_{k=1}^K C_{\min,k}(\mathbf{X}) = 0 \right)$$

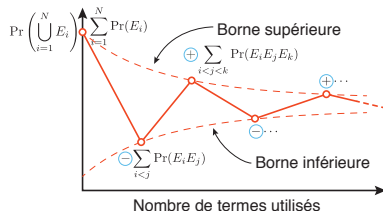


Principe d'inclusion-exclusion

$$\Pr \left(\bigcup_{i=1}^N E_i \right) = \sum_i \Pr(E_i) - \sum_{i < j} \Pr(E_i E_j) + \sum_{i < j < k} \Pr(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{N-1} \Pr(E_1 E_2 \dots E_N)$$

Probabilité de défaillance - Cas général

$$p_{f,\text{sys}} = \Pr \left(\bigcup_{k=1}^K c_{\min,k}(\mathbf{X}) = 0 \right)$$



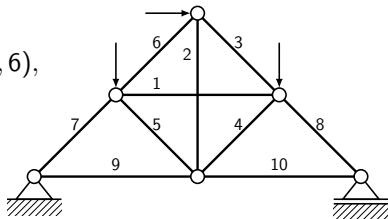
Principe d'inclusion-exclusion

$$\Pr \left(\bigcup_{i=1}^N E_i \right) = \sum_i \Pr(E_i) - \sum_{i<j} \Pr(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} \Pr(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{N-1} \Pr(E_1 E_2 \dots E_N)$$

Example #9.2 [🚀]

Quels sont les **ensembles de survie minimaux**?

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\min} = & \{(7), (8), (9), (10), \\ & (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ & (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ & (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 6)\} \end{aligned}$$



Si $p_{f,i} = 0.01$ et $p_{f,i} \perp p_{f,j}, \forall i \neq j$, $p_{f,\text{sys}} = \Pr(\cup_{k=1}^K \mathcal{C}_{\min,k}(\mathbf{X}) = 0)$

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \underbrace{\sum_i \Pr(E_i)}_{0.0415} - \underbrace{\sum_{i < j} \Pr(E_i E_j)}_{6.6 \times 10^{-4}} + \underbrace{\sum_{i < j < k} \Pr(E_i E_j E_k)}_{4.9 \times 10^{-6}} + \underbrace{\dots}_{\approx 0} \cong 0.0408$$

$p_{f,sys}$ - cas spécial: composantes indépendantes

$$p_{f,sys} = \Pr(\{S_{sys} = 0\}) \quad \text{Système}$$

$$p_{f,i} = \Pr(\{S_i = 0\}) \quad \text{Composante}$$

$$\Pr(\{S_{sys} = 0\}) \equiv 1 - \mathbb{E}[S_{sys}]$$

Soit une variable aléatoire $S : s \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= 0 \times \Pr(S = 0) + 1 \times \Pr(S = 1) \\ &= \Pr(S = 1) \end{aligned}$$

$p_{f,sys}$ - cas spécial: composantes indépendantes

Système en série

$$p_{f,sys} = 1 - \prod_{i=1}^m \mathbb{E}[S_i] = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{f,i})$$

Système en parallèle

$$p_{f,sys} = 1 - \mathbb{E} \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - S_i) \right] = \prod_{i=1}^m p_{f,i}$$

Système général (série de systèmes en parallèles)

$$p_{f,sys} = 1 - \prod_{k=1}^K \left(1 - \prod_{i \in \mathcal{C}_{min,k}} p_{f,i} \right)$$

Cas spécial: $p_{f,i} = p_{f,j} \& p_{f,i} \perp p_{f,j}, \forall i \neq j$ [m]

$$p_{f,sys} = ?$$

Système en série

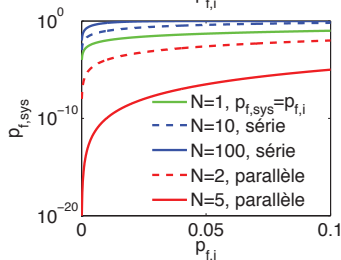
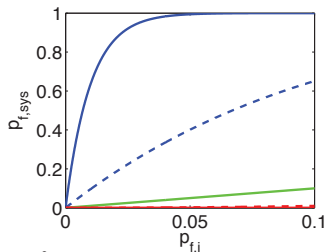
$$p_{f,sys} = 1 - (1 - p_{f,i})^K$$

$$p_{f,sys} \gg p_{f,i}$$

Système en parallèle

$$p_{f,sys} = p_{f,i}^K$$

$$p_{f,sys} \ll p_{f,i}$$



Formulation - Cas général (estimation)

$$\begin{aligned}
 p_{f,sys} = & \sum_k \Pr(\mathcal{C}_{min,k}) \\
 & - \sum_{k < l} \Pr(\mathcal{C}_{min,k} \mathcal{C}_{min,l}) \\
 & + \sum_{k < l < m} \Pr(\mathcal{C}_{min,k} \mathcal{C}_{min,l} \mathcal{C}_{min,m}) \\
 & - \cdots + (-1)^{N-1} \Pr(\mathcal{C}_{min,1} \mathcal{C}_{min,2} \cdots \mathcal{C}_{min,K})
 \end{aligned}$$

Approximations:

$\Pr(\mathcal{C}_{min,k})$: FORM/SORM (ref. modules 6 [[link](#)] & 8 [[link](#)])

$\Pr(\mathcal{C}_{min,1} \mathcal{C}_{min,2} \cdots)$: FORM - systèmes



Plan de la section

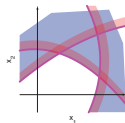
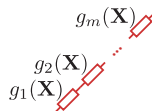
Approx. FORM

- 4.1 Introduction
 - 4.2 Cas 1 – Fiabilité d'un système en série
 - 4.3 Cas 2 – Fiabilité d'un système en parallèle
 - 4.4 Cas 3 – Système général
 - 4.5 Exemple #9.3 – mécanismes de défaillance
-

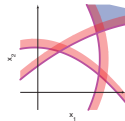
Approximation FORM appliquée aux systèmes

Comment utilise-t-on FORM afin d'estimer

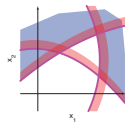
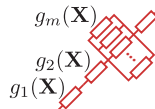
Cas 1 - *Fiabilité d'un système en série*



Cas 2 - *Fiabilité d'un système en parallèle*



Cas 3 - *Fiabilité d'un système*



Rappel: FORM composante []

Linéarisation: On linéarise la fonction d'état limite dans l'espace normal centré réduit.

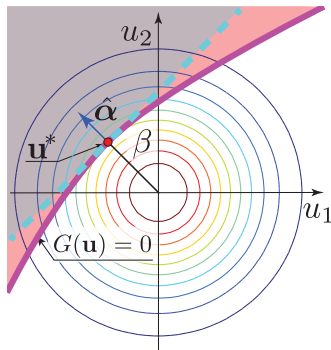
$$\begin{aligned} G(\mathbf{U}) &\cong \overbrace{G(\mathbf{u}^*)}^{\equiv 0} + \nabla G(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*) \\ &= \nabla G(\mathbf{u}^*)\mathbf{U} - \nabla G(\mathbf{u}^*)\mathbf{u}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{G(\mathbf{u}) \leq 0\} &\cong \{\beta - \hat{\alpha}\mathbf{u} \leq 0\} \\ &= \{\beta \leq \hat{\alpha}\mathbf{u}\} \end{aligned}$$

$$\beta \cong \beta_{\text{FORM}} = -\frac{\nabla G(\mathbf{u}^*)}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} \mathbf{u}^* = \hat{\alpha}\mathbf{u}^*$$

$\mathbf{u}^*$: *Point de conception*, i.e., point de défaillance le plus probable

$$\mathbf{u}^* = \beta \hat{\alpha}^\top = \arg \min_{\mathbf{u}} \{\|\mathbf{u}\| \mid G(\mathbf{u}) = 0\}$$



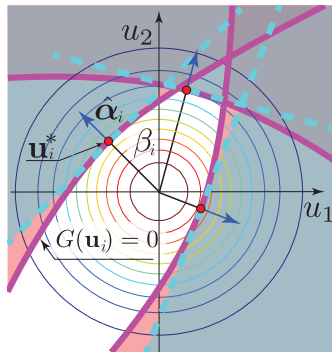
Cas 1 – Fiabilité d'un système en série

$$\begin{aligned}
 p_{f,\text{sys}} &= \Pr(\bigcup_{i=1}^m \{g_i(\mathbf{X}) \leq 0\}) \\
 &\cong \Pr(\bigcup_{i=1}^m \{\beta_i \leq \hat{\alpha}_i \mathbf{U}_i\}) \\
 &= \Pr(\bigcup_{i=1}^m \{\beta_i \leq V_i\}) \\
 &= 1 - \Pr(\bigcap_{i=1}^m \{V_i < \beta_i\}) \\
 &= 1 - \Phi_m(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}_{\hat{\alpha}})
 \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^\top$, et la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\hat{\alpha}}$ est définie par

$$[\mathbf{R}_{\hat{\alpha}}]_{k,l} = [\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l^\top]_{k,l}, k, l = 1, \dots, m$$

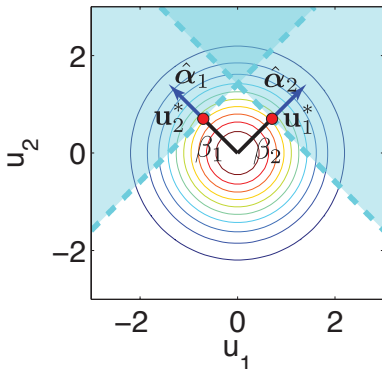
$$\{G(\mathbf{u}_i) \leq 0\} \cong \{\beta_i \leq \overbrace{\hat{\alpha}_i \mathbf{u}_i}^{v_i}\}$$



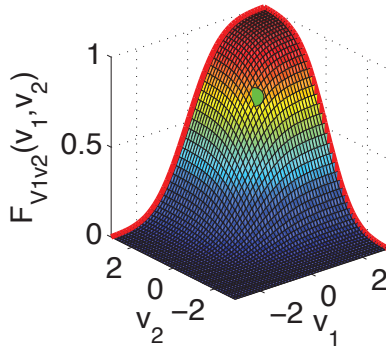
Exemple #9.3 - Cas 1, système en série [📄]

$$\beta_1 = \beta_2 = 1, p_{f,1} = p_{f,2} = 0.16$$

$$\rho = \alpha \alpha^T = 0$$



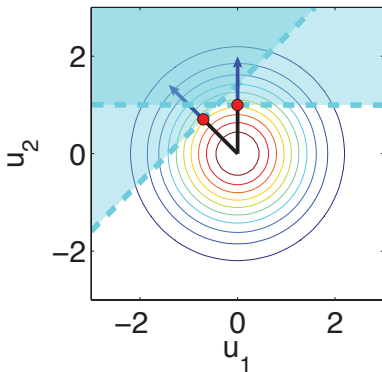
$$p_{f,\text{sys}} = 0.29$$



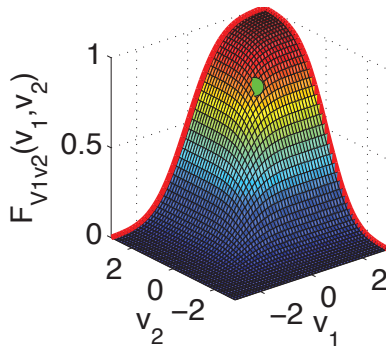
Exemple #9.3 - Cas 1, système en série [📄]

$$\beta_1 = \beta_2 = 1, \quad p_{f,1} = p_{f,2} = 0.16$$

$$\rho = \alpha \alpha^T = 0.71$$



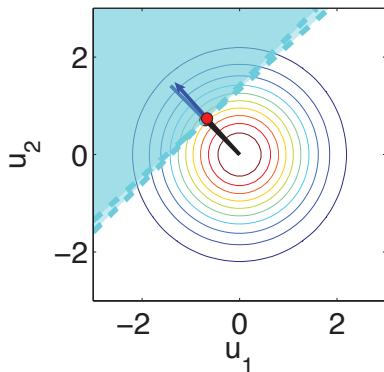
$$p_{f,\text{sys}} = 0.23$$



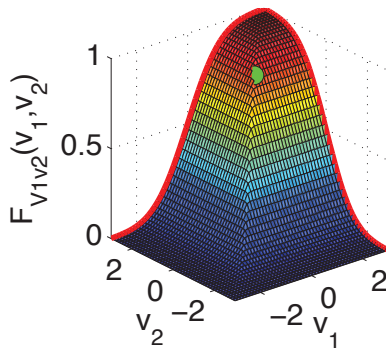
Exemple #9.3 - Cas 1, système en série [📄]

$$\beta_1 = \beta_2 = 1, \quad p_{f,1} = p_{f,2} = 0.16$$

$$\rho = \alpha \alpha^T \approx 1$$



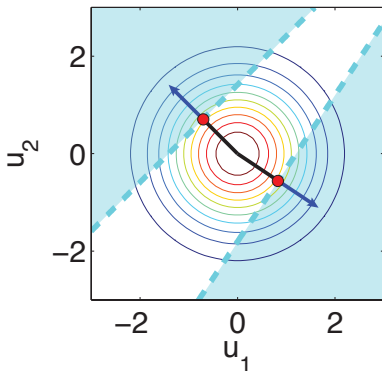
$$p_{f,\text{sys}} = 0.16$$



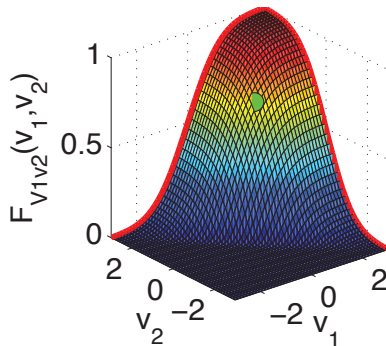
Exemple #9.3 - Cas 1, système en série [📐]

$$\beta_1 = \beta_2 = 1, \quad p_{f,1} = p_{f,2} = 0.16$$

$$\rho = \alpha \alpha^T = -0.98$$



$$p_{f,\text{sys}} = 0.32$$

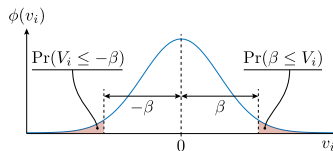


Cas 2 – Fiabilité d'un système en parallèle

$$\begin{aligned}
 p_{f,\text{sys}} &= \Pr(\bigcap_{i=1}^m \{g_i(\mathbf{X}) \leq 0\}) \\
 &\cong \Pr(\bigcap_{i=1}^m \{\beta_i \leq \hat{\alpha}_i \mathbf{U}_i\}) \\
 &= \Pr(\bigcap_{i=1}^m \{\beta_i \leq V_i\}) \\
 &= \Pr(\bigcap_{i=1}^m \{V_i \leq -\beta_i\}) \\
 &= \Phi_m(-\beta, \mathbf{R}_{\hat{\alpha}})
 \end{aligned}$$

où $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$, et la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\hat{\alpha}}$ est définie par $[\mathbf{R}_{\hat{\alpha}}]_{k,l} = [\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l^T]_{k,l}$, $k, l = 1, \dots, m$

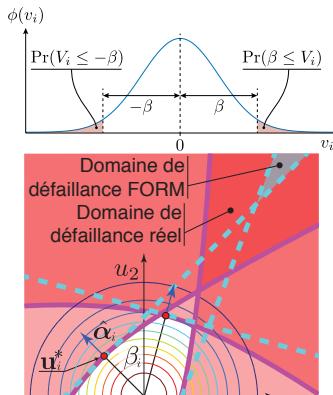
La linéarisation aux points $\mathbf{u}_i^*$ peut être problématique



Cas 2 – Fiabilité d'un système en parallèle

$$\begin{aligned}
 p_{f,\text{sys}} &= \Pr(\cap_{i=1}^m \{g_i(\mathbf{X}) \leq 0\}) \\
 &\cong \Pr(\cap_{i=1}^m \{\beta_i \leq \hat{\alpha}_i \mathbf{U}_i\}) \\
 &= \Pr(\cap_{i=1}^m \{\beta_i \leq V_i\}) \\
 &= \Pr(\cap_{i=1}^m \{V_i \leq -\beta_i\}) \\
 &= \Phi_m(-\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}_{\hat{\alpha}})
 \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$, et la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\hat{\alpha}}$ est définie par

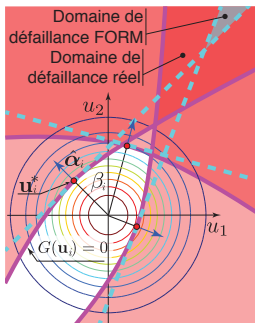


Cas 2 – Système en parallèle, points de conceptions

Points de conception

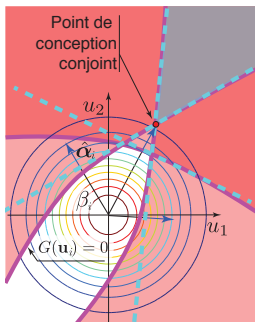
$$\mathbf{u}_i^*$$

$$\mathbf{u}_i^* = \arg \min_{\mathbf{u}_i} \{ \|\mathbf{u}_i\| \mid G(\mathbf{u}_i) = 0 \}$$



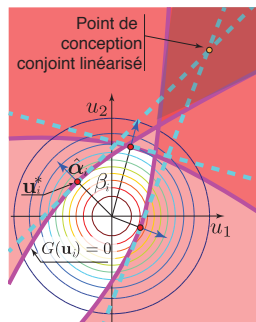
Point de conception conjoint

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\| \mid \bigcap_{i=1}^m G(\mathbf{u}) \leq 0 \right\}$$



Point de conception conjoint linéarisé

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\| \mid \bigcap_{i=1}^m \beta_i - \hat{\alpha}_i \mathbf{u}_i \leq 0 \right\}$$

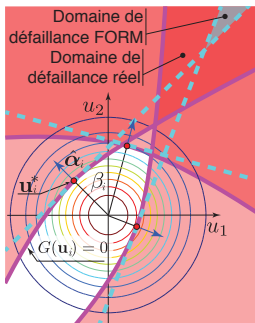


Cas 2 – Système en parallèle, points de conceptions

Points de conception

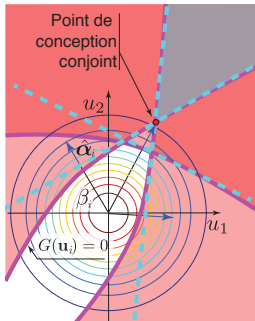
$$\mathbf{u}_i^*$$

$$\mathbf{u}_i^* = \arg \min_{\mathbf{u}_i} \{ \|\mathbf{u}_i\| \mid G(\mathbf{u}_i) = 0 \}$$



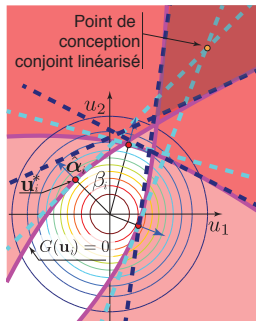
Point de conception conjoint

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\| \mid \bigcap_{i=1}^m G(\mathbf{u}) \leq 0 \right\}$$



Point de conception conjoint linéarisé

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\| \mid \bigcap_{i=1}^m \beta_i - \hat{\alpha}_i \mathbf{u}_i \leq 0 \right\}$$

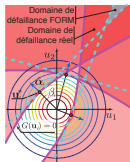


Cas 2 – Système en parallèle, points de conceptions

Points de conception

$$\mathbf{u}_i^*$$

$$\mathbf{u}_i^* = \arg \min_{\mathbf{u}_i} \{ \|\mathbf{u}_i\| \mid G(\mathbf{u}_i) = 0 \}$$

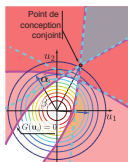


Approximation de mauvaise qualité



Point de conception conjoint

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\| \mid \bigcap_{i=1}^m G(\mathbf{u}) \leq 0 \right\}$$

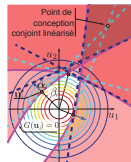


Requiert une optimisation complexe



Point de conception conjoint linéarisé

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\| \mid \bigcap_{i=1}^m \beta_i - \hat{\alpha}_i \mathbf{u}_i \leq 0 \right\}$$

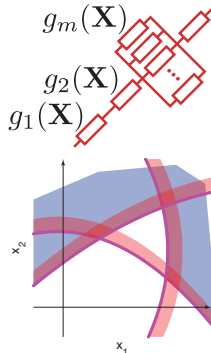


Méthode utilisée en pratique



Cas 3 – Système général

$$\begin{aligned}
 p_{f,\text{sys}} &= \Pr \left(\bigcup_{k=1}^K \left\{ \bigcap_{i \in \mathcal{C}_{\min,k}} g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \right\} \right) \\
 &= \sum_k \Pr(\mathcal{C}_{\min,k}) \\
 &\quad - \sum_{k < l} \Pr(\mathcal{C}_{\min,k} \mathcal{C}_{\min,l}) \\
 &\quad + \sum_{k < l < m} \Pr(\mathcal{C}_{\min,k} \mathcal{C}_{\min,l} \mathcal{C}_{\min,m}) \\
 &\quad - \cdots + (-1)^{N-1} \Pr(\mathcal{C}_{\min,1} \mathcal{C}_{\min,2} \cdots \mathcal{C}_{\min,K})
 \end{aligned}$$



Utiliser la loi d'inclusion/exclusion où les probabilité conjointes $\Pr(\mathcal{C}_{\min,1} \mathcal{C}_{\min,2} \cdots)$ sont estimés à l'aide de FORM.

Cas 3 - Système général (cont.)

- ▶ Le nombre de probabilité conjointes $\Pr(C_{\min,1}C_{\min,2}\cdots)$ à estimer croit rapidement avec le nombre d'ensembles de survie.
- ▶ La contribution des probabilités conjointes $\Pr(C_{\min,1}C_{\min,2}\cdots)$ diminue avec le nombre de termes considérés (Voir exemple #9.2)
- ▶ Bornes inférieures et supérieures:

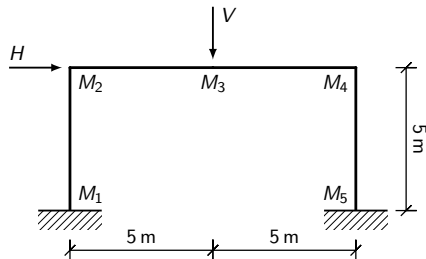
$$p_{f,\text{sys}} \geq \Pr(C_{\min,1}) + \sum_{k=2}^m \max \left[0, \Pr(C_{\min,k}) - \sum_{l=1}^{k-1} \Pr(C_{\min,k}C_{\min,l}) \right]$$

$$p_{f,\text{sys}} \leq \Pr(C_{\min,1}) + \sum_{k=2}^m \left[\Pr(C_{\min,k}) - \max_{l < k} \Pr(C_{\min,k}C_{\min,l}) \right]$$

Exemple #9.3 – mécanismes de défaillance

Soit un cadre rigide plastique où

$$\mathbf{x} = [M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, H, V]^T$$

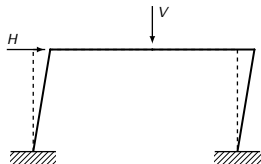


variables	unités	PDF	$\mu(\cdot)$	$\sigma(\cdot)$	corrélation
$M_i, i = 1 : 5$	kN·m	Log normale	150	30	$\rho_{M_i M_j} = 0.3, i \neq j$
H	kN	Log normale	50	20	indépendent
V	kN	Gamma	60	12	indépendent

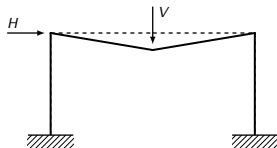
Exemple #9.3 – mécanismes de défaillance

 $g_1(\mathbf{x})$

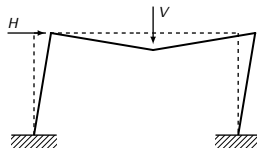
Flexion latérale


 $g_2(\mathbf{x})$

Flexion verticale


 $g_1(\mathbf{x})$

Flexion combinée



$$g_i(\mathbf{x}) = \text{travail virtuel interne} - \text{travail virtuel externe}$$

$$g_1(\mathbf{x}) = M_1 + M_2 + M_4 + M_5 - 5H$$

$$g_2(\mathbf{x}) = M_2 + 2M_3 + M_4 - 5V$$

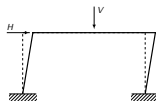
$$g_3(\mathbf{x}) = M_1 + 2M_3 + 2M_4 + M_5 - 5H - 5V$$

Exemple #9.3 - Résultats partiels FORM

Fonction d'état limite $g_1(\mathbf{x})$

$$\beta_1 = 2.27, \quad p_{f, \text{FORM}, 1} = 0.011$$

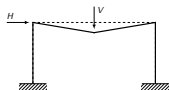
$$\hat{\alpha}_1 = [-0.23, -0.17, -0.04, -0.13, -0.11, 0.94, -0.00]$$



Fonction d'état limite $g_2(\mathbf{x})$

$$\beta_2 = 2.88, \quad p_{f, \text{FORM}, 2} = 0.002$$

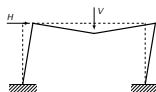
$$\hat{\alpha}_2 = [-0.26, -0.36, -0.42, -0.20, -0.00, -0.00, 0.76]$$



Fonction d'état limite $g_3(\mathbf{x})$

$$\beta_3 = 2.00, \quad p_{f, \text{FORM}, 2} = 0.023$$

$$\hat{\alpha}_3 = [-0.31, -0.13, -0.29, -0.24, -0.11, 0.80, 0.31]$$



Exemple #9.3 - Calcul de $p_{f,\text{sys}}$

$$[\mathbf{R}_{\hat{\alpha}}]_{k,l} = [\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l^T]_{k,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0.17 & 0.90 \\ 0.17 & 1 & 0.54 \\ 0.90 & 0.54 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour un système en série,

$$p_{f,\text{FORM},\text{sys}} = 1 - \Phi_3(\beta, \mathbf{R}_{\hat{\alpha}}) = 0.027, \quad \beta_{\text{sys}} = 1.9$$



Plan de la section

Monte-Carlo

5.1 Formulation

5.2 Example #9.3

Estimation de $p_{f,\text{sys}}$ à l'aide d'échantillonnage Monte Carlo

$$\hat{p}_{f,MC} = \widehat{\mathbb{E}[I(\mathbf{x})]} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}_i) \quad \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}_i) \right]$$

où,

$$I(\mathbf{x}) = 1 - s_{\text{sys}}(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{k=1}^K \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{C}_{\min,k}} (1 - s_i(\mathbf{x})) \right]$$

et,

$$s_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

Exemple #9.3 - Calcul de $p_{f,sys,MC}$

Les modes de défaillance représentent un système en série tel que

$$I(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{k=1}^3 s_i(\mathbf{x})$$

où,

$$s_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ (Défaillance)} \\ 1, & \text{pour } \{g_i(\mathbf{x}) > 0\} \text{ (Survie)} \end{cases}$$

Pour $m = 10^6$ échantillons:

$$\hat{p}_{f,MC} = 0.026 \quad (\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.0061)$$

$p_{f,FORM,sys} = 0.027$

Résumé

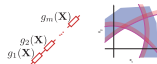
Approximation FORM:

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T, \quad [\mathbf{R}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}]_{k,l} = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_k \hat{\boldsymbol{\alpha}}_l^T]_{k,l}, \quad k, l = 1, \dots, m$$

- La fiabilité d'un système peut être analysée comme une série d'ensembles de survie minimaux (systèmes en parallèles)

Cas 1 - Fiabilité d'un système en série

$$p_{f,sys} = 1 - \Phi_m(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})$$



Cas 2 - Fiabilité d'un système en parallèle

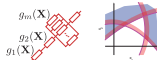
$$p_{f,sys} = \Phi_m(-\boldsymbol{\beta}, \mathbf{R}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})$$



- La probabilité de défaillance des ensembles de survie minimaux peut être approximée à partir des méthode du premier ordre FORM

Cas 3 - Fiabilité d'un système

$$p_{f,sys} = \Pr \left(\bigcup_{k=1}^K \left\{ \bigcap_{i \in \mathcal{C}_{min,k}} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \right\} \right)$$



Approximation Monte Carlo:

- La loi d'inclusion/exclusion permet d'estimer la probabilité de défaillance de systèmes

$$\hat{p}_{f,MC} = \widehat{\mathbb{E}[I(\mathbf{x})]} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}_i)$$

$$I(\mathbf{x}) = 1 - s_{sys}(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{k=1}^K \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{C}_{min,k}} (1 - s_i(\mathbf{x})) \right]$$

*Théorie
probabilité*

- 0 Révision algèbre & probabilités 
- 1 Lois de probabilités  
- 3 PDF multivariés  

*Fiabilité des
structures
& systèmes*

- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes $g_1(\mathbf{X})$ 
- 9 Formulation fiabilité systèmes 

*Estimation – p_f
échantillonnage*

- 4 Monte Carlo  
- 12 Échantillonnage par importance   

*Estimation – p_f
analytique*

- 5 FOSM   
- 6 FORM   
- 8 SORM   

*Utilisation des
résultats*

- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques 
- 11 Données empiriques 
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques