

Module #8

Estimation de la fiabilité: Approximation du second ordre, sachant la distribution $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal



Section 14.4 - A. Der Kiureghian (2005). *First- and second-order reliability methods*. Chapter 14 in *Engineering design reliability handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL.

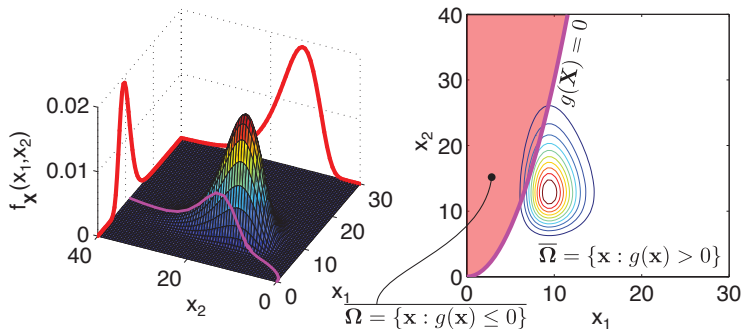
Probabilité de défaillance – Fonction d'état limite

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$: ensemble de variables aléatoires

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: densité de probabilité conjointe

$g(\mathbf{X})$: fonction d'état limite

$g(\mathbf{X}) = 0$: surface d'état limite



Problématique?

Que fait-on lorsque $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ et $N > 2$?

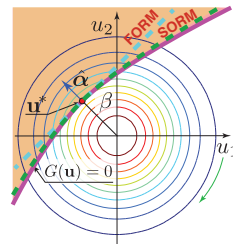
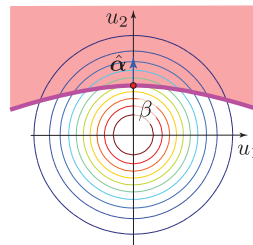
- ▶ Il n'est plus possible de tracer $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
- ▶ Intégrer analytiquement en $N > 2$ dimensions est difficile

Solution: *Approximations analytiques, i.e. FOSM, FORM, **SORM** et intégration numérique, i.e. Monte Carlo*

SORM: Approximation du deuxième ordre utilisant la distribution conjointe de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (Second-Order Reliability Method)

Problématique? (cont.)

- 1) Comment estime-t-on la **probabilité contenu dans le demi-espace défini par une parabole**?
- 2) Comment approxime-t-on la fonction d'état limite par une **parabole définie dans l'espace normal centré réduit**?





Plan du module #8

Introduction

p_f : parabole

SORM

Exemple #8.1

Exemple #8.2

Résumé & limitations

Organisation de la matière

<i>Théorie probabilité</i>	0	Révision algèbre & probabilités	
	1	Lois de probabilités	
	3	PDF multivariés	
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>		Introduction	
	2	Formulation fiabilité composantes	$g_1(X)$
	9	Formulation fiabilité systèmes	
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	4	Monte Carlo	
	12	Échantillonnage par importance	
<i>Estimation – p_f analytique</i>	5	FOSM	
	6	FORM	
	8	SORM	
<i>Utilisation des résultats</i>	7	Analyse de sensibilité	
	10	Incertitudes aléatoires & épistémiques	
	11	Données empiriques	
	13	Prise de décision	
	14	Métamodèles & modèles empiriques	



Plan de la section

p_f : **parabole**

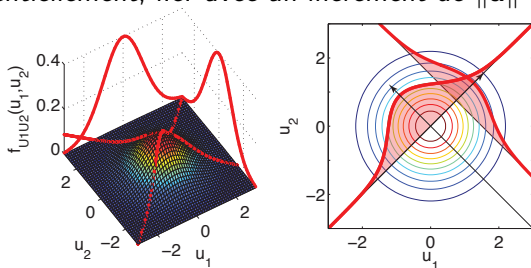
- 2.1 (Rappel) Espace normal centré réduit
 - 2.2 Demi-espace défini par un plan
 - 2.3 Demi-espace défini par une parabole
-

Variables normales centrée réduites

Soit $\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ un ensemble variable aléatoires normales centrée réduites tel que

$$\mathbf{U} \sim \phi_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}\right)$$

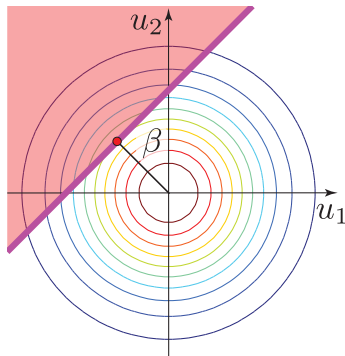
- Les contours de $\phi_n(\mathbf{u})$ sont sphériques et centrés à l'origine
- La probabilité dans toutes les directions radiales diminue exponentiellement, i.e. avec un incrément de $\|\mathbf{u}\|$



$$\beta \rightarrow p_f$$

La probabilité du demi-espace $\Omega = \{\mathbf{u} : G(\mathbf{u}) \leq 0\}$ borné par un plan est **définie par la distance entre l'origine et le plan**.

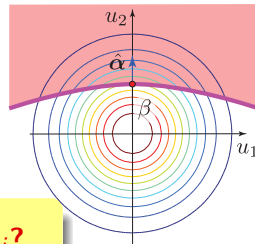
$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{U} \in \Omega) &= \int_{\Omega} \phi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \Phi(-\beta) \\ &= \int_{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= p_f \end{aligned}$$



Probabilité dans le demi-espace défini par une parabole

$$\begin{aligned}
 p_{f,\text{SORM}} &= \Pr \left(\left\{ \beta - u_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i u_i^2 \leq 0 \right\} \right) \\
 &= \phi(\beta) \operatorname{Re} \left\{ i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{i\infty} \frac{1}{s} \exp \left[\frac{(s + \beta)^2}{2} \right] \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_i s}} ds \right\} \\
 &\cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(-\beta) \kappa_i}}
 \end{aligned}$$

où, $\psi(-\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)}$ et κ_i correspondent aux courbures principales



Comment calculer les courbures principales κ_i ?



Plan de la section

SORM

- 3.1 Introduction
 - 3.2 Approximation du second ordre
 - 3.3 Rotation du référentiel
 - 3.4 Exemple
 - 3.5 référentiel $\mathbf{u}$
 - 3.6 Courbures principales
 - 3.7 Sommaire des étapes
 - 3.8 Limitation
-

Formulation SORM

SORM, Second-Order Reliability Method:

Approximation de la surface d'état limite $G(\mathbf{u})$ par un paraboloïde ayant son apex centré sur le point de conception $\mathbf{u}^*$.

Comment?

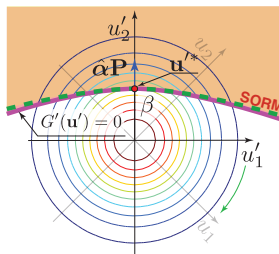
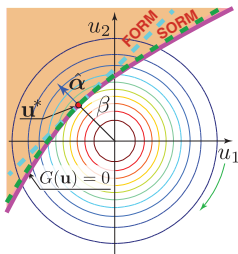
1. Transformation de $g(\mathbf{X})$ dans l'**espace normal centré réduit**
2. Trouver le **point de défaillance le plus probable, $\mathbf{u}^*$**
(Analyse FORM + iHL-RF)
3. Calculer les courbures principales κ_i

$$p_{f,\text{SORM}} \cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(-\beta)\kappa_i}}$$

Formulation SORM - Série de Taylor du second ordre

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{u}) &\cong \underbrace{\overset{\equiv 0}{G(\mathbf{u}^*)} + \nabla G(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)}_{\text{approximation 1}^{\text{er}} \text{ ordre}} + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\
 &= \|\nabla G(\mathbf{u}^*)\| \left[(\beta - \hat{\alpha} \mathbf{u}) + \frac{1}{2\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \right]
 \end{aligned}$$

où le Hessien de $G(\mathbf{u})$ calculé à $\mathbf{u}^*$ est $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right]$



Rotation du référentiel:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{P} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}^T \mathbf{u}'$$

Formulation SORM - Rotation du référentiel

On peut utiliser l'algorithme *Gram-Schmidt* afin d'obtenir la matrice $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{u}' = \mathbf{P}\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{P}^T\mathbf{u}'$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n} \\ \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \cdots & \hat{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

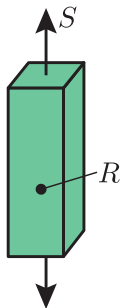
$\mathbf{P}$ est une matrice orthogonale ($\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$) où la dernière rangée est le vecteur $\hat{\alpha}$.

$$\mathbf{u}'^* = \mathbf{P}\mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{Bmatrix}, \quad \nabla G(\mathbf{u}^*)\mathbf{P}^T = [0, 0, \cdots, 0, -\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|]$$

Exemple (Ref. Ex. 6.1) [📄]

Soit $X_1 = D$ et $X_2 = S$ deux variable aléatoires **normales** où:

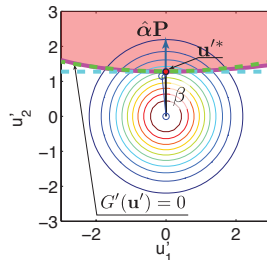
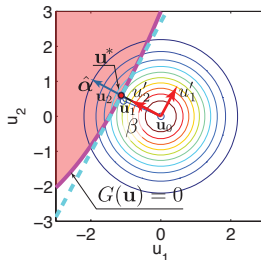
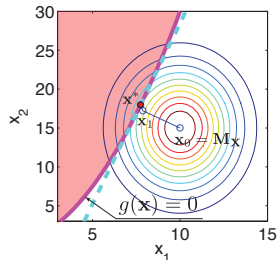
$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases}, f_y = 300 \text{ MPa}, D \perp S$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemple #8.1: rotation du référentiel



$$\hat{\alpha} = [-0.88, 0.47]$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.47 & 0.88 \\ -0.88 & 0.47 \end{bmatrix}$$

Formulation SORM - Dans le référentiel $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}) &\cong \nabla G(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ &= \|\nabla G(\mathbf{u}^*)\| \left[(\beta - \hat{\alpha} \mathbf{u}) + \frac{1}{2\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \right] \end{aligned}$$

Formulation SORM - Dans le référentiel **u'**

$$\begin{aligned}
 G'(\mathbf{u}') &\cong \frac{G(\mathbf{P}^T \mathbf{u}')}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} \\
 &= \beta - \underbrace{\hat{\alpha} \mathbf{P}^T \mathbf{u}'}_{=u'_n} + \frac{1}{2\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} (\mathbf{u}' - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{P} \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) \mathbf{P}^T (\mathbf{u}' - \mathbf{u}^*)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) \mathbf{P}^T}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_1 = [u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}]^T$$

$$\cong \beta - u'_n + \frac{1}{2} (\mathbf{u}' - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{A} (\mathbf{u}' - \mathbf{u}^*)$$

$$\cong \beta - u'_n + \frac{1}{2} \left[\mathbf{u}'_1^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}'_1 + 2 \overbrace{(u'_n - \beta) \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{u}'_1}^{\approx 0 | G(U)=0} + a_{nn} \overbrace{(u'_n - \beta)^2}^{\approx 0 | G(U)=0} \right]$$

$$\cong \beta - u'_n + \frac{1}{2} \mathbf{u}'_1^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}'_1 \quad (\text{paraboloïde ayant son apex à } \mathbf{u}^*)$$

Formulation SORM - Courbures principales ($N > 2$)

$$G'(\mathbf{u}') \cong \beta - u'_n + \frac{1}{2} \mathbf{u}'_1{}^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}'_1 \quad (\text{paraboloïde ayant son apex à } \mathbf{u}'^*)$$

Afin d'obtenir la forme

$$G'(\mathbf{u}') \cong \beta - u'_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i u_i''^2$$

où κ_i sont les courbures principales du paraboloides, on définit une transformation $\mathbf{u}''_1 = \mathbf{Q} \mathbf{u}'_1$ et $\mathbf{u}'_1 = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}''_1$, tel que

$$\mathbf{u}'_1{}^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}''_1{}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_{11} \mathbf{Q}^T \mathbf{u}''_1$$

où $\mathbf{Q}$ est la matrice contenant les vecteurs propres de $\mathbf{A}_{11}$

$\kappa_i, i = 1, \dots, n-1$ sont les valeurs propres

Sommaire des étapes

1. Calculer le Hessien de $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{\partial G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i} \right) \\ &\approx \frac{\frac{\partial G(\mathbf{u}^* + \Delta u_i)}{\partial u_j} - \frac{\partial G(\mathbf{u}^* - \Delta u_i)}{\partial u_j}}{2\Delta u_i} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{u}^* + \Delta u_i)}{\partial u_j} = \frac{G(\mathbf{u}^* + \Delta u_i + \Delta u_j) - G(\mathbf{u}^* + \Delta u_i - \Delta u_j)}{2\Delta u_j}$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{u}^* - \Delta u_i)}{\partial u_j} = \frac{G(\mathbf{u}^* - \Delta u_i + \Delta u_j) - G(\mathbf{u}^* - \Delta u_i - \Delta u_j)}{2\Delta u_j}$$

Sommaire des étapes

1. Calculer le Hessien de $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right]$
2. Construire la matrice $\mathbf{P}$ ayant comme dernière rangée $\hat{\alpha}$

```
def rotation(alpha):
    I = np.eye(len(alpha))
    V = np.concatenate((alpha, I[:,1:]), axis=1)
    P = gschmidt(V)
    P = np.concatenate((P[:,1:].transpose(),
                        [P[:,0]]), axis=0)
    return P
```

```
def gschmidt(A):
    m, n = np.shape(A)
    P = np.zeros((m,n))
    R = np.zeros((n,n))
    for j in range(n):
        V=A[:,j]
        if j> 0:
            for i in range(j):
                R[i,j]=P[:,i]
                @ np.transpose([A[:,j]])
                V=V-R[i,j]*P[:,i]
            R[j,j] = np.linalg.norm(V,2)
            P[:,j] = V/R[j,j]
    return P
```


Sommaire des étapes

1. Calculer le Hessien de $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right]$
2. Construire la matrice $\mathbf{P}$ ayant comme dernière rangée $\hat{\alpha}$
3. Calculer $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)\mathbf{P}^T}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & a_{nn} \end{bmatrix}$
4. Calculer les courbures principales κ_i à partir des $n - 1$ valeurs propres de $\mathbf{A}_{11}$

5. Calculer

$$\begin{aligned}
 pf_{\text{SORM}} &= \Pr \left(\left\{ \beta - u_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i u_i^2 \leq 0 \right\} \right) \\
 &\cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(-\beta)\kappa_i}}, \text{ où } \psi(-\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)}
 \end{aligned}$$

Limitation

Lorsque l'évaluation de $g(\mathbf{x})$ demande un grand temps de calcul (e.g. modèle élément finis), le calcul du Hessien

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right] \text{ devient difficile.}$$

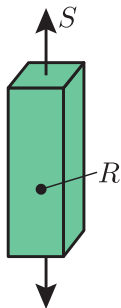
Dans un tel cas, d'autres techniques existent afin d'évaluer les dérivés partielle du second ordre. Voir

Der Kiureghian, A. and De Stefano, M. (1991). Efficient algorithm for second-order reliability analysis. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 117(12), 2904–2923.

Exemple #8.1 (Ref. Ex. 6.1) [📄]

Soit $X_1 = D$ et $X_2 = S$ deux variable aléatoires **normales** où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases}, f_y = 300 \text{ MPa}, D \perp S$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sommaire des étapes

1. Calculer le Hessien de $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right] = \begin{bmatrix} 2401.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Construire la matrice $\mathbf{P}$ ayant comme dernière rangée $\hat{\alpha}$

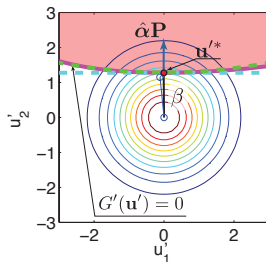
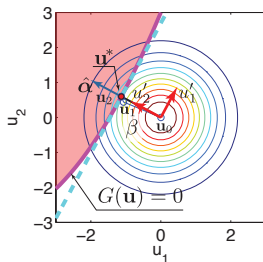
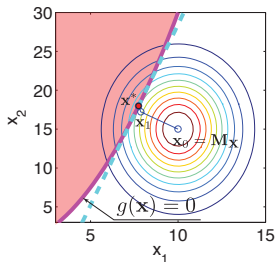
3. Calculer

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)\mathbf{P}^\top}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^\top & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.051 & -0.095 \\ -0.095 & 0.177 \end{bmatrix}$$

4. Calculer les courbures principales à partir des $n - 1$ valeurs propres de $\mathbf{A}_{11}$, $\kappa_1 = 0.051$

5. Calculer

$$p_{f,\text{SORM}} \cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(-\beta)\kappa_i}}, \text{ où } \psi(-\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)}$$

Exemple #8.1: Résultats []

$$p_{f,FORM} = 0.1008$$

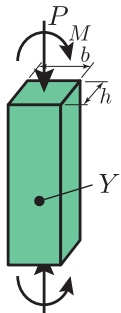
$$p_{f,SORM} = 0.0966$$

$$p_{f,MC} = 0.0967$$

$$(\delta_{p_{f,MC}} = 0.001)$$

Comme $\mathbf{A}_{11} = [\cdot]_{1 \times 1}$, $\kappa_1 = \mathbf{A}_{11}$

Exemple #8.2



Soit une colonne à section rectangulaire $b \times h$: $b = 100 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$ sollicitée par une force axiale P et un moment fléchissant M . La colonne plastifie si

$$\frac{M}{M_u} + \left(\frac{P}{P_u} \right)^2 \geq 1, \text{ où } P_u = bhY, \text{ et } M_u = \frac{bh^2Y}{4}$$

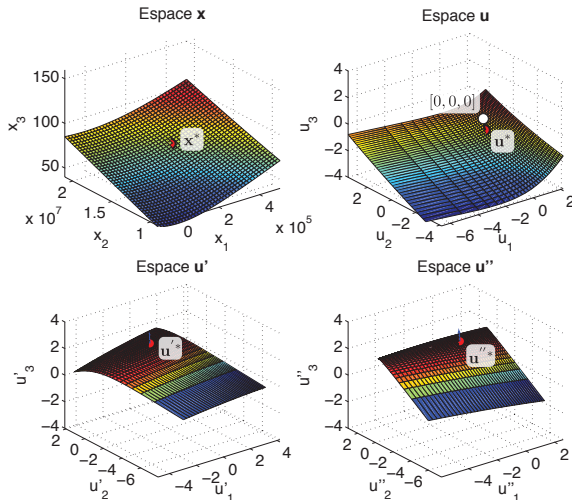
(Distribution conjointe de type **Nataf**)

Variable	unités	PDF	$\mu(\cdot)$	$\sigma(\cdot)$	$\rho_P(\cdot)$	$\rho_M(\cdot)$	$\rho_Y(\cdot)$
P	kN	Log normale	200	100	1	0.5	0
M	kN·m	Log normale	15	2	0.5	1	0
Y	MPa	Gamma	100	20	0	0	1

Sommaire des étapes

1. Calculer le Hessien de $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right]$
2. Construire la matrice $\mathbf{P}$ ayant comme dernière rangée $\hat{\alpha}$
3. Calculer $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)\mathbf{P}^T}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & a_{nn} \end{bmatrix}$
4. Calculer les courbures principales à partir des $n - 1$ valeurs propres de $\mathbf{A}_{11}$
5. Calculer

$$p_{f,\text{SORM}} \cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(-\beta)\kappa_i}}, \text{ où } \psi(-\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)}$$

Exemple #8.2: Résultats SORM []

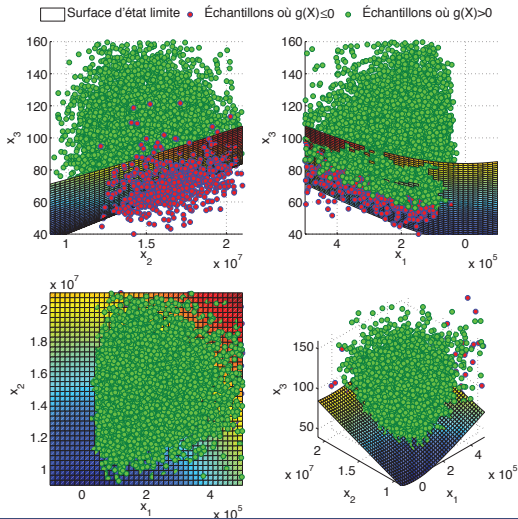
$$P_{f,FORM} = 0.0570$$

$$P_{f,SORM} = 0.0709$$

$$P_{f,MC} = 0.0680$$

$$(\delta_{P_{f,MC}} = 0.0037)$$

Exemple #8.2: Résultats Monte Carlo



$$p_{f,FORM} = 0.0570$$

$$p_{f,SORM} = 0.0709$$

$$p_{f,MC} = 0.0680$$

$$(\delta_{p_{f,MC}} = 0.0037)$$

Limitations

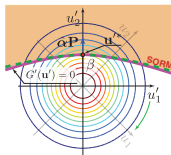
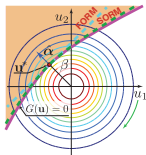
- ▶ La méthode **SORM** approxime la surface d'état limite $g(\mathbf{X})$ par un paraboloïde. Cette approximation peut être erronée si $g(\mathbf{X})$ est fortement non-linéaire. **Solution**: Monte Carlo
- ▶ Comme pour les méthodes FORM, lorsque N est grand le domaine contribuant à l'intégrale de p_f n'est pas concentré autour du le point de défaillance le plus probable $\mathbf{u}^*$.
- ▶ Pour la plupart des cas d'intérêts pratiques la méthode **SORM** s'avère adéquate.

Résumé

1. Calculer le Hessien de $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^*)}{\partial u_i \partial u_j} \right]$
2. Construire la matrice $\mathbf{P}$ ayant comme dernière rangée $\hat{\alpha}$
3. Calculer $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)\mathbf{P}^T}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & a_{nn} \end{bmatrix}$
4. Calculer les courbures principales à partir des $n - 1$ valeurs propres de $\mathbf{A}_{11}$
5. Calculer

$$P_{f,SORM} = \Pr \left(\left\{ \beta - u_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i u_i^2 \leq 0 \right\} \right)$$

$$\cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(-\beta)\kappa_i}}, \text{ où } \psi(-\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)}$$



Rotation du référentiel:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{P}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}^T \mathbf{u}'$$

<i>Théorie probabilité</i>	{	0	Révision algèbre & probabilités	
		1	Lois de probabilités	
		3	PDF multivariés	
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	{		Introduction	
		2	Formulation fiabilité composantes	$g_1(\mathbf{X})$ 
		9	Formulation fiabilité systèmes	
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	{	4	Monte Carlo	 
		12	Échantillonnage par importance	  
<i>Estimation – p_f analytique</i>	{	5	FOSM	  
		6	FORM	  
		8	SORM	  
<i>Utilisation des résultats</i>	{	7	Analyse de sensibilité	
		10	Incertitudes aléatoires & épistémiques	
		11	Données empiriques	
		13	Prise de décision	
		14	Métamodèles & modèles empiriques	