

Module #6

Estimation de la fiabilité: Approximation linéaire, sachant la distribution $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal



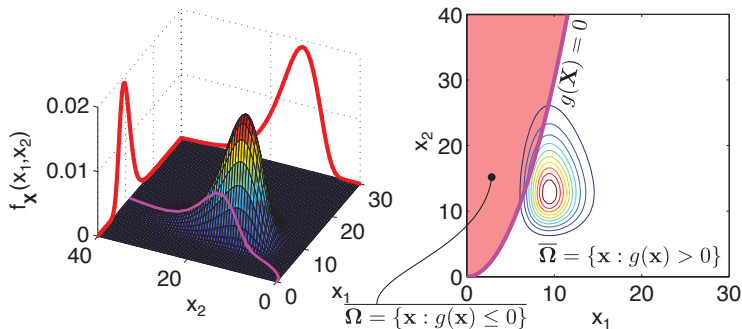
Section 5.3 - A. Der Kiureghian, (2014), *Structural and System Reliability (manuscript)*. Department of Civil and Environmental Engineering, UC Berkeley



A. Der Kiureghian (2005). *First- and second-order reliability methods*. Chapter 14 in Engineering design reliability handbook

Probabilité de défaillance - Fonction d'état limite

- $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$: ensemble de variables aléatoires
 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: densité de probabilité conjointe
 $g(\mathbf{X})$: fonction d'état limite
 $g(\mathbf{X}) = 0$: surface d'état limite



Problématique?

Que fait-on lorsque $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ et $n > 2$?

- ▶ Il n'est plus possible de tracer $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
- ▶ Intégrer analytiquement en $n > 2$ dimensions est difficile

Solution: *Approximations analytiques, i.e. FOSM, FORM, SORM*
et *intégration numérique, i.e. Monte Carlo*

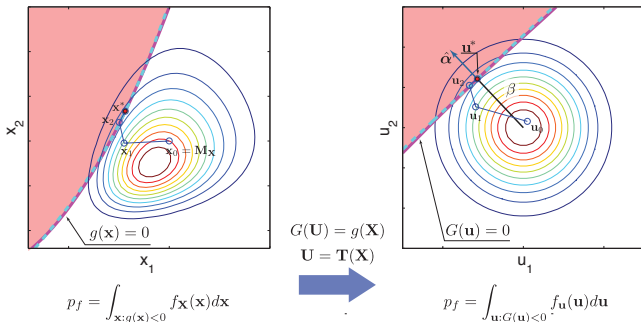
FORM: Approximation du premier ordre utilisant la distribution conjointe de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (First-Order Reliability Method)


Avec **FOSM**, on assume qu'on ne connaît que les deux premiers moments de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{X} \sim (\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$

Problématique? (cont.)

Comment transformer un ensemble de variables aléatoires quelconques $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$, en un ensemble de variables aléatoires normales centrées réduites $\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$?

























$$\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{U} \sim f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})$$



 Plan du module #6

Introduction
X ↔ U
FORM
Ex. #6.1
Ex. #6.2
Ex. #6.3
Ex. #6.4
Résumé

Organisation de la matière

<i>Théorie probabilité</i>	}	0	Révision algèbre & probabilités 
		1	Lois de probabilités  
		3	PDF multivariés  
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	}	Introduction	
		2	Formulation fiabilité composantes $g_1(\mathbf{X})$ 
		9	Formulation fiabilité systèmes 
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	}	4	Monte Carlo  
		12	Échantillonnage par importance   
<i>Estimation – p_f analytique</i>	}	5	FOSM   
		6	FORM   
		8	SORM   
<i>Utilisation des résultats</i>	}	7	Analyse de sensibilité
		10	Incertitudes aléatoires & épistémiques 
		11	Données empiriques  
		13	Prise de décision
		14	Métamodèles & modèles empiriques

 Plan de la section

X ↔ U

2.1 Rappel: Espace normal centré réduit

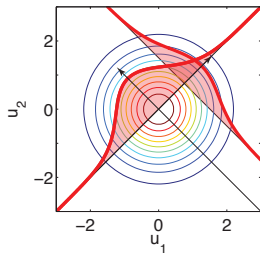
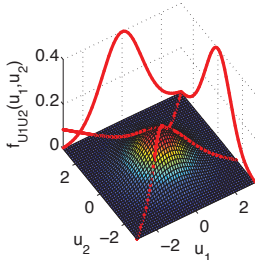
2.2 Transformations **X ↔ U**2.3 Cas 1: $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$ 2.4 Cas 2: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), X_i \perp X_j \forall i \neq j$ 2.5 Cas 3: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 2.6 Cas 4: Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i), \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$

Variables normales centrées réduites

Soit $\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ un ensemble de variables aléatoires normales centrées réduites telles que

$$\mathbf{U} \sim \phi_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}\right)$$

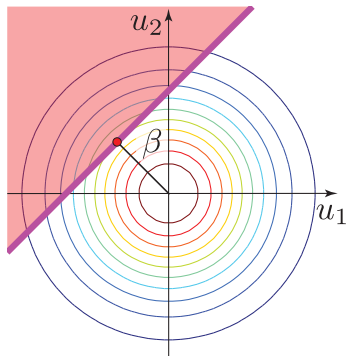
- ▶ Les contours de $\phi_n(\mathbf{u})$ sont sphériques et centrés à l'origine
- ▶ La probabilité dans toutes les directions radiales diminue exponentiellement, i.e. avec un incrément de $\|\mathbf{u}\|$



$$\beta \rightarrow p_f$$

La probabilité du demi-espace $\Omega = \{\mathbf{u} : G(\mathbf{u}) \leq 0\}$ borné par un plan est **définie par la distance entre l'origine et le plan.**

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{U} \in \Omega) &= \int_{\Omega} \phi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \Phi(-\beta) \\ &= \int_{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= p_f \end{aligned}$$



Valide pour $u_i \perp u_j$

Transformations $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{U}$

Soit un ensemble de variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ où

$$\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \text{ et } F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Soit un ensemble de variables aléatoires normales centrées réduites

$$\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_n\} \text{ où } \mathbf{U} \sim f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \phi_n(\mathbf{u}) \text{ et } F_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \Phi_n(\mathbf{u}).$$

L'approximation analytique de p_f requiert

1. une transformation $\mathbf{u} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u})$

2. le Jacobien, $\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}$ de la transformation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}$, $[\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}]_{ij} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{ij}$

Rappel: $\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}^{-1}$ est utilisé pour $\nabla G(\mathbf{u}) = \nabla g(\mathbf{x}) \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}$

4 cas communs pour $\mathbf{T}(\cdot)$ et $\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}$

- ▶ **Cas 1:** $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$ (distribution normale)
- ▶ **Cas 2:** $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \forall i \neq j$
(variables aléatoires indépendantes)
- ▶ **Cas 3:** $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
(cas général où la distribution conjointe est connue)
- ▶ **Cas 4:** Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$
($f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est définie par une distribution de type Nataf)

Cas 1: $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_X, \Sigma_{XX})$ (distribution normale) [m]

$$F_X(\mathbf{x}) = \Phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{R}_{XX})$$

$$\mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}_X^{-1}}_{\mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \mathbf{M}_X)$$

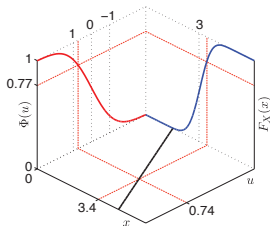
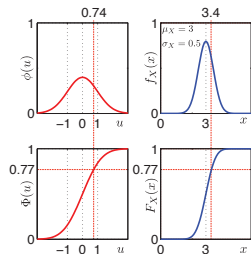
$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_X + \underbrace{\mathbf{D}_X \mathbf{L}}_{\mathbf{J}_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}} \mathbf{u}$$


$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}^{-1} = \mathbf{D}_X \mathbf{L}$$

où $\Sigma_{XX} = \mathbf{D}_X \mathbf{R}_{XX} \mathbf{D}_X$, $\mathbf{D}_X = \text{diag}[\sigma_{x_i}]$,

$\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$ et $\mathbf{L} = \text{Cholesky}(\mathbf{R}_{XX})$

L: Matrice triangulaire inférieure



Cas 2: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $X_i \perp X_j \forall i \neq j$ 

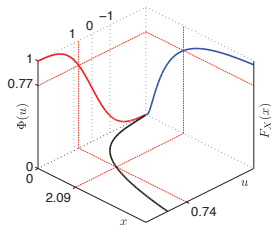
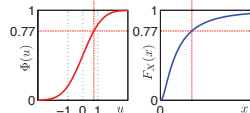
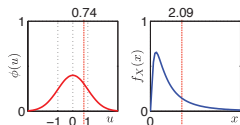
$$F_{X_i}(x_i) = \Phi(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i))$$

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i))$$

$$[J_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}]_{i,j} = \frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(u_i)}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} [J_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}]_{i,i} & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ \text{sym.} & & [J_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}]_{n,n} \end{bmatrix}$$



Cas 3: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (distribution conjointe connue)

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{n|1:n-1}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \cdots f_{2|1}(x_2|x_1)f_1(x_1)$$

$$F_{i|1:i-1}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{i|1:i-1}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) dx_i$$

Transformation de Rosenblatt:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ \Phi^{-1}[F_{2|1}(x_2|x_1)] \\ \dots \\ \Phi^{-1}[F_{n|1:n-1}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})] \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{l} F_1^{-1}[\Phi(u_1)] \\ F_{2|1}^{-1}[\Phi(u_2)|u_1] \\ \dots \\ F_{n|1:n-1}^{-1}[\Phi(u_n)|u_1, \dots, u_{n-1}] \end{array} \right\}$$

Cas 3: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (distribution conjointe connue)

$$[J_{1,1}] = \frac{f_{X_1}(x_1)}{\phi(u_1)}$$

$$\begin{aligned} [J_{ij}] &= 0, \forall i < j \\ &= \frac{f_{i|1:i-1}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})}{\phi(u_i)}, \forall i = j > 1 \\ &= \frac{1}{\phi(u_i)} \frac{\partial F_{i|1:i-1}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})}{\partial x_j}, \forall i > j \end{aligned}$$

1- La transformation de Rosenblatt **dépend du choix de l'ordre des variables aléatoires.**

2- En pratique, **la distribution conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ peut être construite à partir d'une dist. de type Morgenstern**

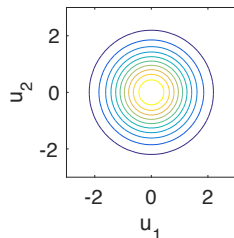
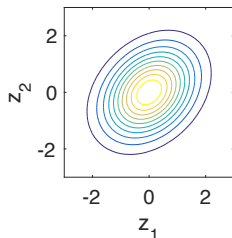
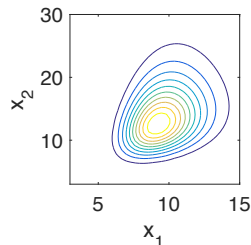
Cas 4: Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ (dist. conjointe Nataf)

Cas commun en pratique: On connaît les distributions marginales $f_{X_i}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ et la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$.

La **distribution de type Nataf** permet de construire une distribution conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ à partir de ces informations.

Transformation $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Z} \leftrightarrow \mathbf{U}$

- ▶ $\mathbf{X} \sim$ Nataf: Espace réel
- ▶ $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_0)$: Espace normal centré réduit corrélé
- ▶ $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$: Espace normal centré réduit

Transformation $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Z} \leftrightarrow \mathbf{U}$ 

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ \dots \\ \Phi^{-1}[F_n(x_n)] \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} F_1^{-1}[\Phi(z_1)] \\ \dots \\ F_n^{-1}[\Phi(z_n)] \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{L}_0 \mathbf{u} \quad \leftarrow \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

Cas 4: Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$

Soit les distributions marginales $X_i \sim f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, ρ_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, et soit un ensemble correspondant de variables aléatoires **normales centrées réduites** $Z_i \sim \phi(z_i)$.

$$z_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)]$$

Sachant que $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z}$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \underbrace{\frac{dz}{dx}}_{\mathbf{J}_{z,x}} = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^n \underbrace{\frac{f_i(X_i)}{\phi(z_i)}}_{\mathbf{J}_{z,x}}$$

Il ne reste qu'à identifier la matrice de corrélation \mathbf{R}_0

Cas 4: Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ (Cont.)

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{0,12} & \cdots & \rho_{0,1n} \\ & 1 & \cdots & \rho_{0,2n} \\ & & \ddots & \rho_{0,n-1n} \\ \text{sym.} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \phi_2(z_i, z_j, \rho_{0,ij}) dz_i dz_j$$

En général, $|\rho_{ij}| \leq |\rho_{0,ij}|$. Également, il n'y a pas de solution directe liant ρ_{ij} et $\rho_{0,ij}$, i.e. **résolution numérique inverse**.

Cas 4: Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ (Cont.)

Dans un tel cas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{L}_0^{-1} \begin{Bmatrix} \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ \dots \\ \Phi^{-1}[F_n(x_n)] \end{Bmatrix}$$

où \mathbf{L}_0 est la décomposition de Cholesky de \mathbf{R}_0 , la matrice de corrélation de \mathbf{Z} , $z_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)]$.

Transformation inverse:

$$\mathbf{z} = \mathbf{L}_0 \mathbf{u}, \quad x_i = F_i^{-1}[\Phi(z_i)]$$

Jacobien:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{z}} \mathbf{J}_{\mathbf{z}, \mathbf{x}} = \mathbf{L}_0^{-1} \text{diag} \left[\frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(z_i)} \right]$$

Plan de la section

FORM

3.1 Introduction

3.2 Formulation

3.3 Rappel: iHL-RF

Formulation FORM

Soit $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ et soit une fonction d'état limite $g(\mathbf{X})$.

FORM, First-Order Reliability Method:

Approximation du premier ordre de $G(\mathbf{U})$ centré sur le point de défaillance le plus probable (PDPP), \mathbf{u}^*

Comment?

1. Transformation de $g(\mathbf{X})$ dans l'**espace normal centré réduit**
2. Approximation centrée sur le **point de défaillance le plus probable**

⚠️ \hat{m} procédure que FOSM mais en partant de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
plutôt que de $\mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}})$

Formulation FORM (\equiv FOSM) – Linéarisation

Linéarisation: On linéarise $G(\mathbf{u})$ dans l'espace NCR.

$$G(U) \cong \overbrace{G(\mathbf{u}^*)}^{\equiv 0} + \nabla G(\mathbf{u}^*)(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)$$

$$= \nabla G(\mathbf{u}^*)\mathbf{U} - \nabla G(\mathbf{u}^*)\mathbf{u}^*$$

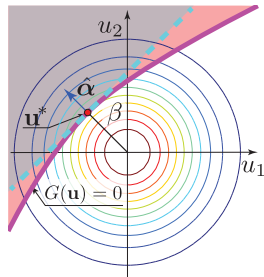
$$\nabla G(\mathbf{u}) = \nabla g(\mathbf{x})\mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}$$

$$\mu_{G(U)} = -\nabla G(\mathbf{u}^*)\mathbf{u}^*$$

$$\sigma_{G(U)}^2 = \nabla G(\mathbf{u}^*)^T \Sigma_{\mathbf{U}\mathbf{U}} \nabla G(\mathbf{u}^*)$$

$$= \nabla G(\mathbf{u}^*)^T \mathbf{I} \nabla G(\mathbf{u}^*) = \|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|^2$$

$$\beta \cong \beta_{\text{FOSM}} = \frac{\mu_{G(U)}}{\sigma_{G(U)}} = -\frac{\nabla G(\mathbf{u}^*)}{\underbrace{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|}_{\hat{\alpha}}} \mathbf{u}^* = \hat{\alpha} \mathbf{u}^*$$



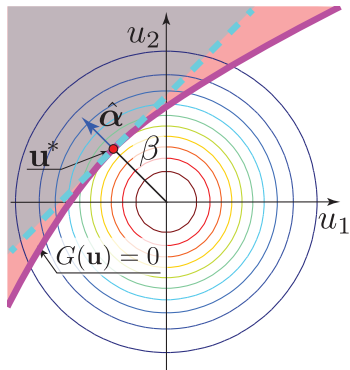
Formulation FORM (\equiv FOSM) – Point de conception

$\hat{\alpha}$: Vecteur gradient négatif normalisé, i.e. vecteur unitaire perpendiculaire à $G(\mathbf{u}^*)$ et pointant vers le domaine de défaillance

$$\hat{\alpha} = - \frac{\nabla G(\mathbf{u}^*)}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|}$$

\mathbf{u}^* : *Point de conception*, i.e., point de défaillance le plus probable

$$\mathbf{u}^* = \beta \hat{\alpha}^T = \arg \min_{\mathbf{u}} \{\|\mathbf{u}\| \mid G(\mathbf{u}) = 0\}$$



Prochaine étape: *Comment trouver \mathbf{u}^* ?*

Comment trouver le point de conception \mathbf{u}^* ? (\equiv FOSM)

⚠ Il n'y a pas de solution analytique pour trouver \mathbf{u}^*

Algorithme iHL-RF: *improved Hasofer-Lind, Rackwitz-Fiessler*
iHL-RF est un algorithme itératif basé sur la méthode de
 Newton-Raphson

Algorithme *iHL-RF* – point de conception \mathbf{u}^* (\equiv FOSM)

À l'itération i , (pour $i = 0$, $\mathbf{u}_i = \mu_{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{U}) &\cong \overbrace{G(\mathbf{u}_i)}^{\neq 0} + \nabla G(\mathbf{u}_i)(\mathbf{U} - \mathbf{u}_i) \\
 &\cong \underbrace{G(\mathbf{u}_i) - \nabla G(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i}_{\mu_{G(\mathbf{U})}} + \nabla G(\mathbf{u}_i)\mathbf{U}
 \end{aligned}$$

$$\beta_i \cong \frac{\mu_{G(\mathbf{U})}}{\sigma_{G(\mathbf{U})}} = \frac{G(\mathbf{u}_i) - \nabla G(\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i}{\|\nabla G(\mathbf{u}_i)\|} = \frac{G(\mathbf{u}_i)}{\|\nabla G(\mathbf{u}_i)\|} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \beta_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^T = \left[\frac{G(\mathbf{u}_i)}{\|\nabla G(\mathbf{u}_i)\|} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \mathbf{u}_i \right] \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^T$$

Algorithme *iHL-RF* – facteur d'échelle (\equiv FOSM)

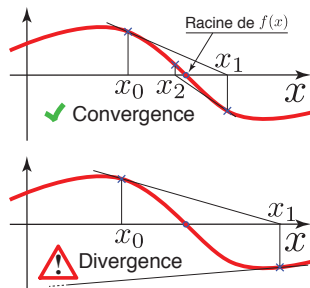
Les méthodes de type *Newton-Rapson* peuvent diverger si le pas $\|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|$ est trop grand.

Solution:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \lambda_i \mathbf{d}_i$$

où le *facteur d'échelle* $\lambda_i \in (0, 1]$, et le *vecteur direction* est

$$\mathbf{d}_i = \underbrace{\beta_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^T}_{\mathbf{u}_{i+1}} - \mathbf{u}_i$$



Algorithme *iHL-RF* – Vérification (\equiv FOSM)

Pour $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \lambda_i \mathbf{d}_i$, le choix d'une valeur de λ_i est adéquat si

$$m(\mathbf{u}_i + \lambda_i \mathbf{d}_i) < m(\mathbf{u}_i)$$

où

$$m(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + c |G(\mathbf{u})|$$

et où c est une constante satisfaisant la contrainte

$$c > \frac{\|\mathbf{u}_i\|}{\|\nabla G(\mathbf{u}_i)\|}$$

La valeur de λ_i est optimisée si

$$\lambda_i = \arg \min_{\lambda} \{m(\mathbf{u}_i + \lambda \mathbf{d}_i)\}$$

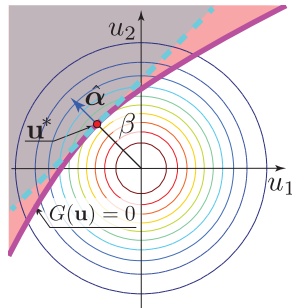
Algorithme *iHL-RF* – Critères de convergence (\equiv FOSM)

1 - \mathbf{u}_i doit être sur la surface d'état limite

$$\left| \frac{G(\mathbf{u}_i)}{G(\mathbf{0})} \right| < \epsilon_1$$

2 - \mathbf{u}_i doit être une projection de $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ à partir de l'origine

$$\left\| \mathbf{u}_i - \underbrace{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \mathbf{u}_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^T}_{\beta_i} \right\| < \epsilon_2$$



En pratique:

$$\epsilon_1, \epsilon_2 \approx 10^{-3}$$



Plan de la section

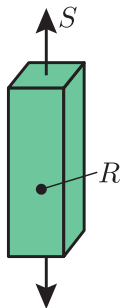
Ex. #6.1

- 4.1 Cas 1: $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$ (distribution normale)
 - 4.2 Transformation
 - 4.3 Méthode FORM
 - 4.4 Résultats
-

Exemple #6.1 [🚩]

Soit $X_1 = D$ et $X_2 = S$ deux variables aléatoires **normales** où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases}, f_y = 300 \text{ MPa}, D \perp S$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_x = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right] = [2x_1 f_y, -1]$$

Jacobien:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}^{-1} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Transformation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{x}}^{-1}}_{\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \mathbf{M}_{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \left(\mathbf{x} - \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix} \right)$$

Transformation $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{L}}_{\mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Étapes à suivre:

1. Initialization: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{M}_\mathbf{x} = [10, 15]^\top \rightarrow \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} = [0, 0]^\top$

2. Évaluer la fonction d'état limite et son gradient

$$G(\mathbf{u}_i) = g(\mathbf{x}_i) = 10^2 f_y - 15 = 15$$

$$\nabla G(\mathbf{u}_i) = \nabla g(\mathbf{x}_i) \mathbf{J}_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = [12, -5]$$

3. Calculer le vecteur $\hat{\alpha}_i$

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{\nabla G(\mathbf{u}_i)}{\|\nabla G(\mathbf{u}_i)\|} = -\frac{[12, -5]}{\sqrt{[12, -5][12, -5]^\top}} = [-0.92, 0.38]$$

4. Calculer le vecteur direction \mathbf{d}_i

$$\mathbf{d}_i = \underbrace{\left[\frac{G(\mathbf{u}_i)}{\|\nabla G(\mathbf{u}_i)\|} + \hat{\alpha}_i \mathbf{u}_i \right]}_{\beta_i} \hat{\alpha}_i^\top - \mathbf{u}_i = [-1.07, 0.44]^\top$$

$$\mathbf{u}_{i+1}$$

5. Calculer le point suivant avec $\lambda_0 = 1$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \lambda_i \mathbf{d}_i$$

6. Vérifier que la valeur λ_j utilisée est adéquate

$$\frac{\|\mathbf{u}_0\|}{\|\nabla G(\mathbf{u}_0)\|} = 0 \rightarrow c_0 := 10 > 0$$

$$m(\mathbf{u}_0) = 1/2 \|\mathbf{u}_0\|^2 + c_0 |G(\mathbf{u}_0)|$$

$$m(\mathbf{u}_1) = 1/2 \|\mathbf{u}_1\|^2 + c_0 |G(\mathbf{u}_1)|$$

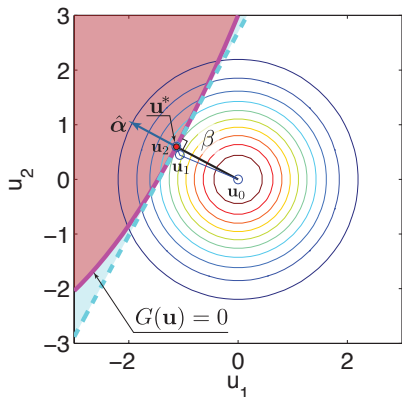
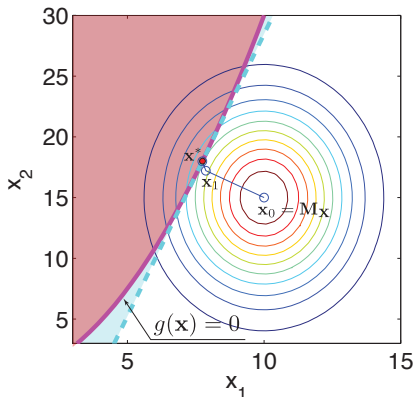
Poursuivre si $m(\mathbf{u}_1) < m(\mathbf{u}_0)$, sinon, recommencer avec

$$\lambda_0 = \lambda_0/2$$

7. Recommencer à l'étape 2 avec

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{x}\mathbf{L}\mathbf{u}_{i+1}$$

Résultats



$$\beta = 1.28, \hat{\alpha} = [-0.88, 0.47], \mathbf{x}^* = \begin{Bmatrix} 7.74 \\ 19.0 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} -1.13 \\ 0.60 \end{Bmatrix}$$

$$Pf_{\text{FORM}} \equiv Pf_{\text{FOSM}} \approx 0.10$$

FORM – Cas 1: $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$ (distribution normale)

Pour le cas où $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$

FORM \equiv FOSM \neq MCFOSM

 Plan de la section

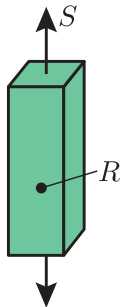
Ex. #6.2

- 5.1 Cas 2: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \forall i \neq j$ (variables aléatoires indépendantes)
 - 5.2 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ & Transformation
 - 5.3 Résultats
-

Exemple #6.2 [🚩]

Soit $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases}, f_y = 300 \text{ MPa}, D \perp S$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right] = [2x_1 f_y, -1]$$

Densité de probabilité marginale []

X_2 : Densité de probabilité Gumbel
(Generalized Extreme Value Distribution, Type-I)

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{x_2 - \mu}{\beta} - \exp \left\{ -\frac{x_2 - \mu}{\beta} \right\} \right]$$

$$F_{X_2}(x_2) = \exp \left[-\exp \left\{ -\frac{x_2 - \mu}{\beta} \right\} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{X_2} &= \mu + \beta\gamma \\ \sigma_{X_2}^2 &= \frac{\pi^2 \beta^2}{6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \mu &= 12.8 \\ \beta &= 3.9 \end{aligned}$$

Transformation $X \leftrightarrow U$ et Jacobien

$$u_1 = \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1))$$

$$u_2 = \Phi^{-1}(F_{X_2}(x_2))$$

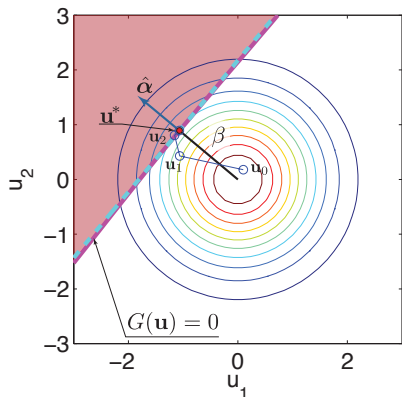
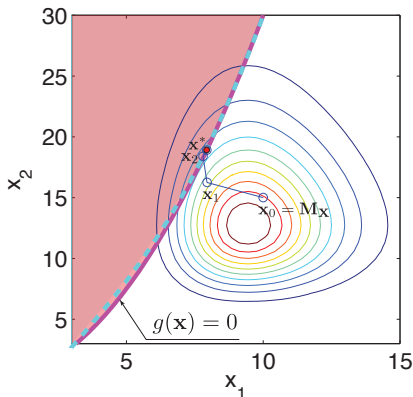
$$\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{f_{X_1}(x_1)}{\phi(u_1)} & 0 \\ 0 & \frac{f_{X_2}(x_2)}{\phi(u_2)} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = F_{X_1}^{-1}(\Phi(u_1))$$

$$x_2 = F_{X_2}^{-1}(\Phi(u_2))$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}^{-1}$$

Résultats



$$\beta = 1.39, \hat{\alpha} = [-0.77, 0.64], \mathbf{x}^* = \begin{Bmatrix} 7.9 \\ 18.9 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} -1.07 \\ 0.89 \end{Bmatrix}$$

$$Pf_{\text{FORM}} \approx 0.08$$

 Plan de la section

Ex. #6.3

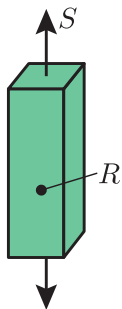
- 6.1 Cas 3: $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (distribution conjointe de type Mortgenstern)
 - 6.2 $f_{\mathbf{X}}(x)$ & Transformation
 - 6.3 Résultats
-

Exemple #6.3 [📌]

Soit $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: distribution conjointe de type **Morgenstern**

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases} \quad S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases} \quad f_y = 300 \text{ MPa}, \quad \rho_{D,S} = 0.30$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right] = [2x_1 f_y, -1]$$

Densités de probabilité marginales []

X₁: Densité de probabilité log normale

$$\mu_{\ln X_1} = \ln \mu_{X_1} - \frac{\zeta_i^2}{2} = 2.28$$

$$\sigma_{\ln X_1} = \sqrt{\ln(1 + \delta_{X_1}^2)} = 0.20$$

X₂: Densité de probabilité Gumbel (GEV, Type-I)

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{x_2 - \mu}{\beta} - \exp \left\{ -\frac{x_2 - \mu}{\beta} \right\} \right]$$

$$F_{X_2}(x_2) = \exp \left[-\exp \left\{ -\frac{x_2 - \mu}{\beta} \right\} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{X_2} = \mu + \beta\gamma \\ \sigma_{X_2}^2 = \frac{\pi^2 \beta^2}{6} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \mu = 12.8 \\ \beta = 3.9 \end{array}$$

Densité de probabilité conjointe []

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)\{1 + \alpha_{12}[1 - F_1(x_1)][1 - F_2(x_2)]\}$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)\{1 + \alpha_{12}[1 - 2F_1(x_1)][1 - 2F_2(x_2)]\}$$

$$\begin{aligned} F_{X_2|X_1}(x_2|x_1) &= \frac{\partial F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{1}{f_{X_1}(x_1)} \\ &= F_{X_2}(x_2)\{1 + [1 - 2F_1(x_1)][1 - F_2(x_2)]\} \end{aligned}$$

$$\alpha_{12} = \frac{\rho_{X_1 X_2}}{4 \times 0.27 \times \frac{\Phi(\sigma_{\ln X_1} / \sqrt{2}) - 0.5}{\sqrt{\exp(\sigma_{\ln X_1}^2) - 1}}} \approx 1$$

Transformation $X \leftrightarrow U$

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)] \\ \Phi^{-1}[F_{X_2|X_1}(x_2|x_1)] \end{array} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 &= F_{X_1}^{-1}[\Phi(u_1)] \\ x_2 &= \text{fct.}(u_2, x_1) \end{aligned}$$

pour x_2 :

$$\begin{aligned} \Phi(u_2) &= F_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \\ 0 &= \Phi(u_2) - F_{X_2}(x_2) \{1 + [1 - F_1(x_1)][1 - F_2(x_2)]\} \end{aligned}$$

... x_2 doit être trouvé numériquement

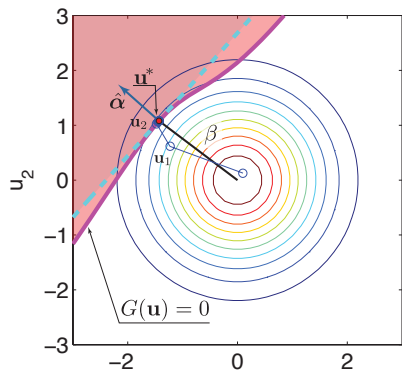
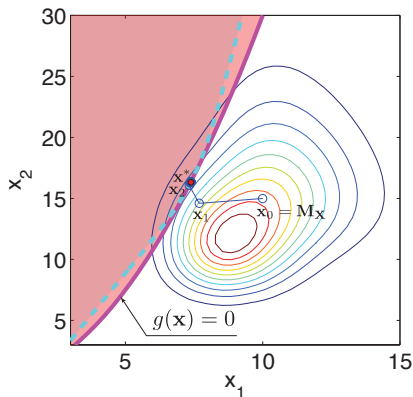
Jacobien

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{f_{X_1}(x_1)}{\phi(u_1)} & 0 \\ \frac{1}{\phi(u_2)} \frac{\partial F_{X_2|X_1}(x_2|x_1)}{\partial x_1} & \frac{f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)}{\phi(u_2)} \end{bmatrix}$$

où,

$$\frac{\partial F_{X_2|X_1}(x_2|x_1)}{\partial x_1} = -2f_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)[1 - F_{X_2}(x_2)]$$

Résultats



$$\beta = 1.79, \hat{\alpha} = [-0.75, 0.67], \mathbf{x}^* = \begin{Bmatrix} 7.39 \\ 16.36 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} -1.43 \\ 1.08 \end{Bmatrix}$$

$$P_{f, \text{FORM}} \approx 0.04$$



Plan de la section

Ex. #6.4

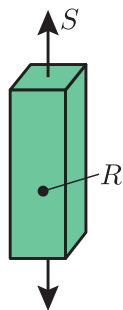
- 7.1 Cas 4: Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, \mathbf{R}_X ($f_X(\mathbf{x})$ est définie par une distribution de type Nataf)
 - 7.2 $f_X(x)$ & Transformation
 - 7.3 Résultats
-

Exemple #6.4 [🔍]

Soit $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: distribution conjointe de type **Nataf**

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases} \quad S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases} \quad f_y = 300 \text{ MPa}, \quad \rho_{D,S} = 0.30$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right] = [2x_1 f_y, -1]$$

Densités de probabilité marginales []

X₁: Densité de probabilité log normale

$$\mu_{\ln X_1} = \ln \mu_{X_1} - \frac{\zeta_i^2}{2} = 2.28$$

$$\sigma_{\ln X_1} = \sqrt{\ln(1 + \delta_{X_1}^2)} = 0.20$$

X₂: Densité de probabilité Gumbel (GEV, Type-I)

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{x_2 - \mu}{\beta} - \exp \left\{ -\frac{x_2 - \mu}{\beta} \right\} \right]$$

$$F_{X_2}(x_2) = \exp \left[-\exp \left\{ -\frac{x_2 - \mu}{\beta} \right\} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{X_2} &= \mu + \beta\gamma \\ \sigma_{X_2}^2 &= \frac{\pi^2 \beta^2}{6} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \mu &= 12.8 \\ \beta &= 3.9 \end{aligned}$$

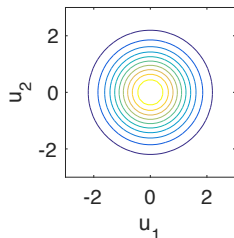
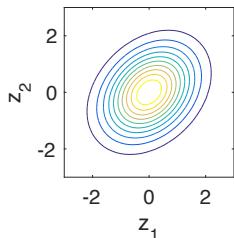
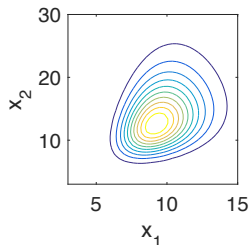
Densité de probabilité conjointe []

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^n \frac{f_i(X_i)}{\phi(z_i)}$$

$$\begin{aligned} \rho_{0, X_1 X_2} &= \rho_{X_1 X_2} (1.029 + 0.001 \rho_{X_1 X_2} + 0.014 \delta_{X_1} + \dots \\ &\quad + 0.004 \rho_{X_1 X_2}^2 + 0.233 \delta_{X_1}^2 - 0.197 \rho_{X_1 X_2} \delta_{X_1}) \\ &= 0.31 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.31 \\ 0.31 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.31 & 0.95 \end{bmatrix}$$

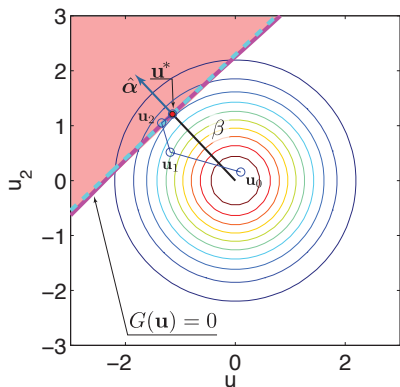
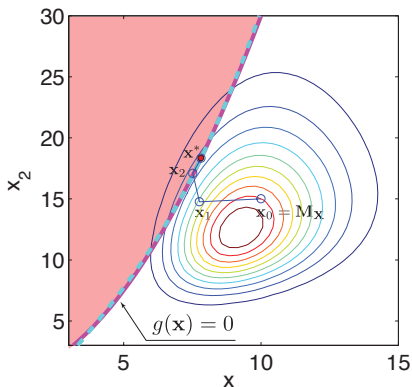
$$\mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{z}} \mathbf{J}_{\mathbf{z}, \mathbf{x}} = \mathbf{L}_0^{-1} \text{diag} \left[\frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(z_i)} \right]$$

Transformation $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Z} \leftrightarrow \mathbf{U}$ 

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ \dots \\ \Phi^{-1}[F_n(x_n)] \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{z}$$

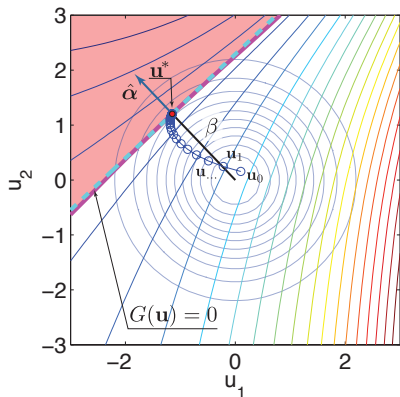
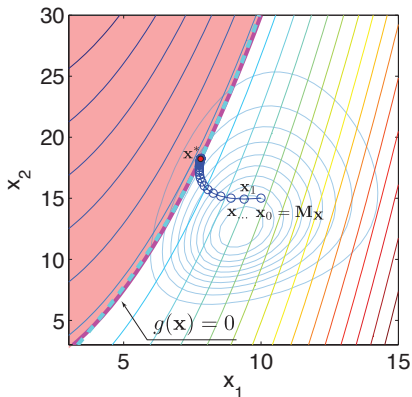
$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} F_1^{-1}[\Phi(z_1)] \\ \dots \\ F_n^{-1}[\Phi(z_n)] \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \quad \mathbf{z} = \mathbf{L}_0 \mathbf{u} \quad \leftarrow \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

Résultats



$$\beta = 1.67, \hat{\alpha} = [-0.69, 0.73], \mathbf{x}^* = \begin{Bmatrix} 7.82 \\ 18.34 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} -1.14 \\ 1.21 \end{Bmatrix}$$

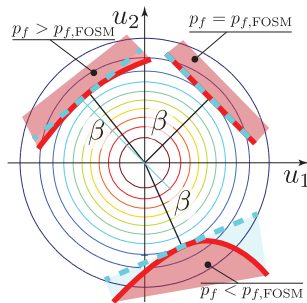
$$Pf_{\text{FORM}} \approx 0.05$$



Même résultats, cette fois-ci en utilisant $\lambda_0 = 0.25$ et en traçant les contours de $g(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{u})$

Limitations

- ▶ La méthode **FORM** approxime la surface d'état limite $g(\mathbf{X})$ par un plan. Cette approximation peut être erronée si $g(\mathbf{X})$ est fortement non-linéaire.
Solutions: SORM ou Monte Carlo
- ▶ Lorsque N est grand le domaine contribuant majoritairement à l'intégrale de p_f n'est pas concentré autour du le point de défaillance le plus probable \mathbf{u}^* .
- ▶ Pour la plupart des cas d'intérêts pratiques, la méthode **FORM** s'avère adéquate.



Pour les 3 cas ci-haut:

- ▶ p_f différents
- ▶ $p_{f,FORM}$ égaux

Résumé

FORM: Même procédure que FOSM mais en partant de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ plutôt que de $\mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$

Transformation $\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}$

- ▶ **Cas 1:** $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}, \Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}})$
(distribution normale)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{M}_{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{M}_{\mathbf{X}} + \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \mathbf{L} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}}^{-1} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \mathbf{L}$$

- ▶ **Cas 2:** $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \forall i \neq j$
(variables aléatoires indépendantes)

$$\begin{aligned} u_i &= \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \\ x_i &= F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \end{aligned}$$

$$[J_{\mathbf{u},\mathbf{x}}]_{i,i} = \frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(u_i)}$$

- ▶ **Cas 3:** $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
(cas général où la distribution conjointe est connue)
... peu utilisé.

- ▶ **Cas 4:** Nataf, $X_i \sim f_{X_i}(x_i)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$
($f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est définie par une distribution de type Nataf)

Transformation $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Z} \leftrightarrow \mathbf{U}$

$\mathbf{X} \sim$ Nataf: Espace réel

$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_0)$: Espace normal centré réduit corrélé






$\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$: Espace normal centré réduit

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{z}, \quad \text{où } \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ \dots \\ \Phi^{-1}[F_n(x_n)] \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} F_1^{-1}[\Phi(z_1)] \\ \dots \\ F_n^{-1}[\Phi(z_n)] \end{Bmatrix}, \quad \text{où } \mathbf{z} = \mathbf{L}_0 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{z}} \mathbf{J}_{\mathbf{z},\mathbf{x}} = \mathbf{L}_0^{-1} \text{diag} \left[\frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(z_i)} \right]$$

*Théorie
probabilité*

- 0 Révision algèbre & probabilités 
- 1 Lois de probabilités  
- 3 PDF multivariés  

*Fiabilité des
structures
& systèmes*

- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes $g_1(X)$ 
- 9 Formulation fiabilité systèmes 



*Estimation – p_f
échantillonnage*

- 4 Monte Carlo  
- 12 Échantillonnage par importance   

*Estimation – p_f
analytique*

- 5 FOSM   
- 6 FORM   
- 8 SORM   

*Utilisation des
résultats*

- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques 
- 11 Données empiriques 
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques