Module #4
Estimation de la fiabilité: méthode d'échantillonnage Monte Carlo

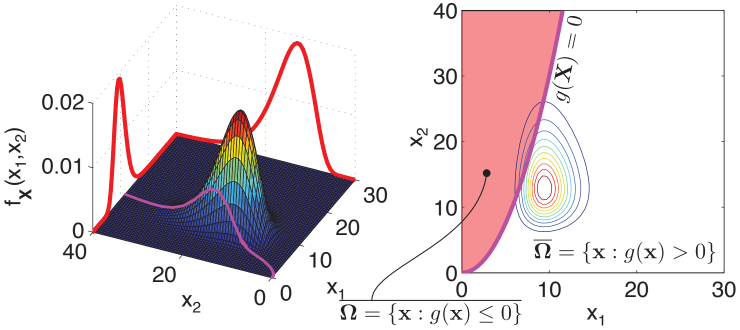
(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal

Probabilité de défaillance - Fonction d'état limite

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$:	ensemble de variables aléatoires
$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$:	densité de probabilité conjointe
$g(\mathbf{X})$:	fonction d'état limite
$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{X}) \leq 0\}$:	domaine de défaillance

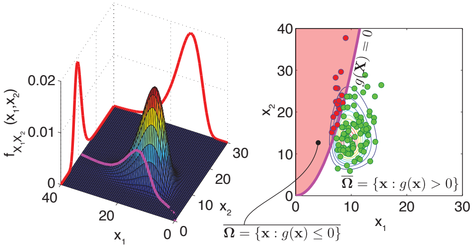


Problématique?

Que fait-on lorsque $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ et $n > 2$?

- Il n'est plus possible de tracer $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
- Intégrer analytiquement en $n > 2$ dimensions est difficile

Solution: *Approximations analytiques, i.e. FOSM, FORM, SORM* et **intégration numérique de type Monte Carlo**



Plan du module #4

Introduction
$\int$ Monte Carlo
Exemple ln $\mathcal{N}$
Échantillonnage
Exemple Nataf
Limitations
Résumé

Organisation de la matière

Théorie probabilité
- 0 Révision algèbre & probabilités
- 1 Lois de probabilités
- 3 PDF multivariés

Fiabilité des structures & systèmes
- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes
- 9 Formulation fiabilité systèmes

Estimation – p_f échantilonnage
- 4 Monte Carlo
- 12 Échantillonnage par importance

Estimation – p_f analytique
- 5 FOSM
- 6 FORM
- 8 SORM

Utilisation des résultats
- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques
- 11 Données empiriques
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques

Plan de la section

Intégration numérique - Exemple #4.1a [.m]

Échantillonnage Monte Carlo pour estimer l'aire d'un cercle?

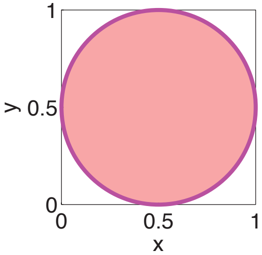
Soit un cercle de diamètre $d = 1$ $(r = 0.5)$ définit par

$$(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = r^2$$

et soit la fonction indicatrice

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq r^2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

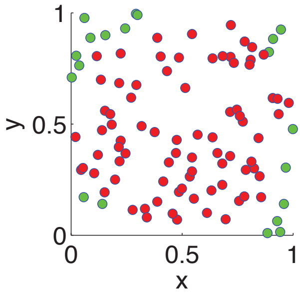
$$\begin{aligned} \underbrace{p}_{\text{aire}} &= \int_y \int_x I(x,y) f_{XY}(x,y) dxdy \\ &= \mathbb{E}[I(X,Y)] \end{aligned}$$



Intégration numérique - Exemple #4.1a (cont.) [.m]

Quelle est l'aire, p, du cercle?

Si l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.



$$p = \mathbb{E}[I(X, Y)] = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} I(x_i, y_i)$$

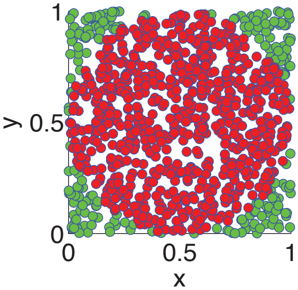
$$p \cong \mathbb{E}[\widehat{I(X, Y)}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} I(x_i, y_i)$$

Pour $m = 100$, $\mathbb{E}[\widehat{I(X, Y)}] = 0.800$ ($\pi r^2 = 0.785$)

Intégration numérique - Exemple #4.1a (cont.) [.m]

Quelle est l'aire, p, du cercle?

Si l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.

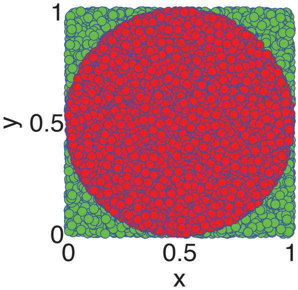


Pour $m = 1\,000$, $\mathbb{E}[\widehat{I(X,Y)}] = 0.759$ $(\pi r^2 = 0.785)$

Intégration numérique - Exemple #4.1a (cont.) [.m]

Quelle est l'aire, p, du cercle?

Si l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.



Pour $m = 10000$, $\mathbb{E}[\widehat{I(X,Y)}] = 0.784$ $(\pi r^2 = 0.785)$

Intégration numérique - Exemple #4.1a (cont.) [.m]

Quelle est l'aire, p, du cercle?

Si l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.

Propriétés:

1 - La qualité de l'estimation $\mathbb{E}[\widehat{I(X,Y)}]$ dépend du nombre d'échantillons

2- L'estimation est indépendante du nombre de dimensions

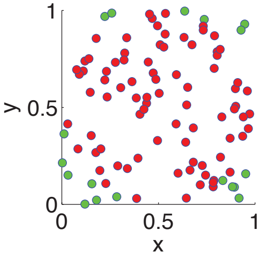
Intégration numérique - Exemple #4.1b [.m]

$\mathbb{E}[I(X,Y)]$ est une variable aléatoire

Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$

Échantillonnage #1

$$\mathbb{E}[\widehat{I(X,Y)}] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(x_i, y_i) = 0.82$$



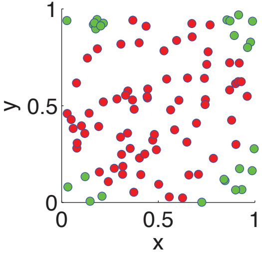
Intégration numérique - Exemple #4.1b [.m]

$\mathbb{E}[I(X,Y)]$ est une variable aléatoire

Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$

Échantillonnage #2

$$\mathbb{E}[\widehat{I(X,Y)}] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(x_i, y_i) = 0.73$$



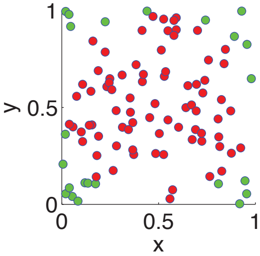
Intégration numérique - Exemple #4.1b [.m]

$\mathbb{E}[I(X,Y)]$ est une variable aléatoire

Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$

Échantillonnage #10 000

$$\mathbb{E}[\widehat{I(X,Y)}] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(x_i, y_i) = 0.77$$



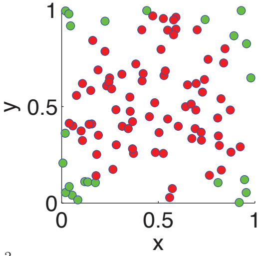
Intégration numérique - Exemple #4.1b [.m]

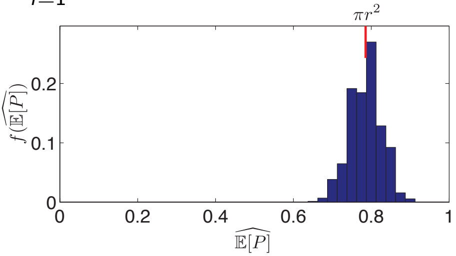
$\mathbb{E}[I(X, Y)]$ est une variable aléatoire

Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$

Échantillonnage #10 000

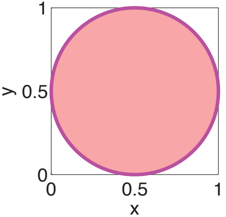
$$\mathbb{E}[\widehat{I(X, Y)}] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(x_i, y_i) = 0.77$$





Formulation analytique pour $f(E[P])$

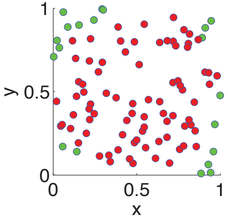
En supposant que l'on représente la fonction indicatrice $I(X,Y)$ par la variable aléatoire de type Bernoulli Z



$$\begin{aligned} f_Z(z) &\sim p^z(1-p)^{1-z},\ z \in \{0,1\} \\ &= \begin{cases} \Pr(Z=1) = p \\ \Pr(Z=0) = 1-p \end{cases} \end{aligned}$$

Formulation analytique pour $f(E[P])$

En supposant que l'on représente la fonction indicatrice $I(X, Y)$ par la variable aléatoire de type Bernoulli Z



$$f_Z(z) \sim p^z(1-p)^{1-z}, \ z \in \{0, 1\}$$

$$= \begin{cases} \Pr(Z = 1) = p \\ \Pr(Z = 0) = 1 - p \end{cases}$$

La densité de probabilité de l'aire P estimée à partir de $i = 1, \cdots, m$ échantillons Monté Carlo est:

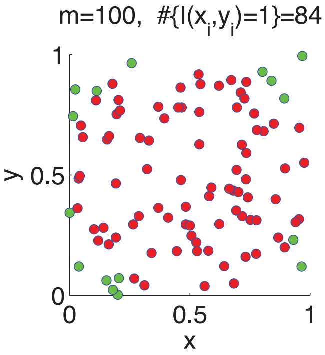
$$f_P(p) = \text{Beta}(a, b) = \frac{1}{\mathcal{B}(a, b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1}, \ p \in (0, 1)$$

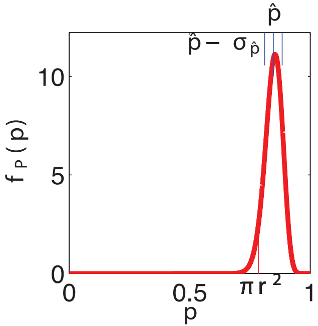
où $\mathcal{B}(a, b)$ est la fonction Beta,

$$a = \#\{i : I(x_i, y_i) = 1\} \text{ et } b = \#\{i : I(x_i, y_i) = 0\}$$

Intégration numérique - Exemple #4.1c [.m]

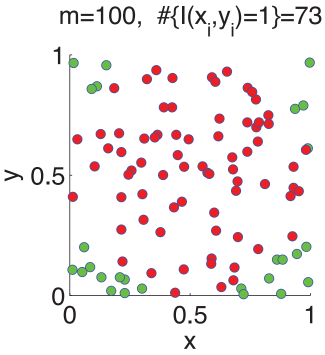
Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.

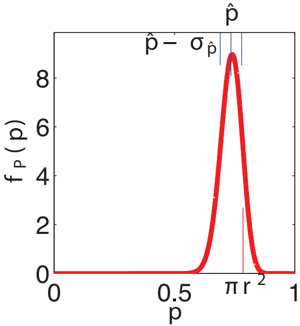




Intégration numérique - Exemple #4.1c [.m]

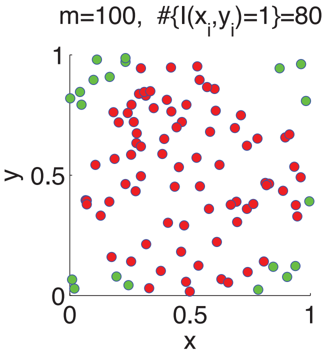
Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.

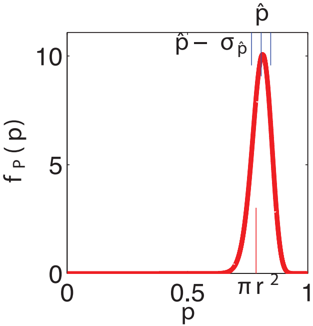




Intégration numérique - Exemple #4.1c [.m]

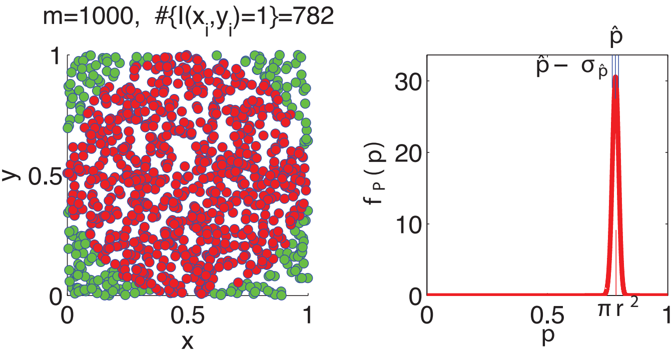
Si l'on fixe $m = 100$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.





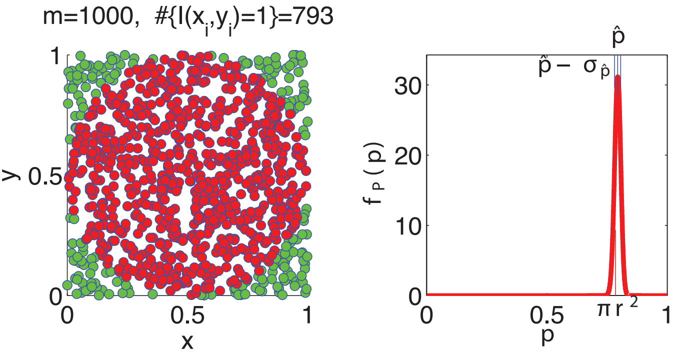
Intégration numérique - Exemple #4.1c [.m]

Si l'on fixe $m = 1000$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.



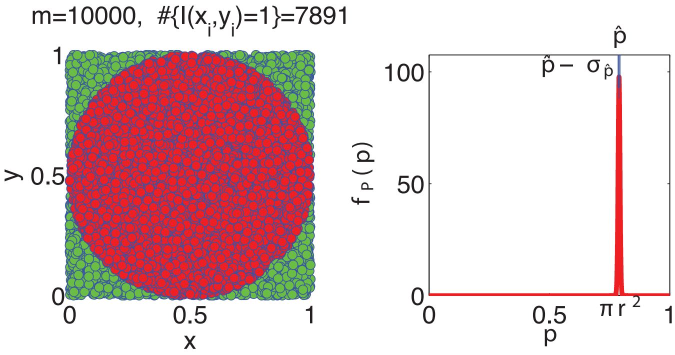
Intégration numérique - Exemple #4.1c [.m]

Si l'on fixe $m = 1000$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.



Intégration numérique - Exemple #4.1c [.m]

Si l'on fixe $m = 10\,000$ et l'on génère des échantillons $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$ selon une densité de probabilité conjointe uniforme, i.e. $f_{XY}(x, y) = 1$.



Probabilité de défaillance - Fonction d'état limite

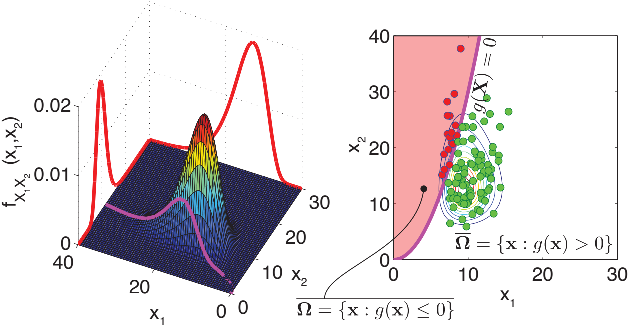
$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$: ensemble de variables aléatoires

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: densité de probabilité conjointe

$g(\mathbf{X})$: fonction d'état limite

$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{X}) \leq 0\}$: domaine de défaillance

$\mathbf{x}_i,\ i = 1, \cdots, m$: **échantillons de X**



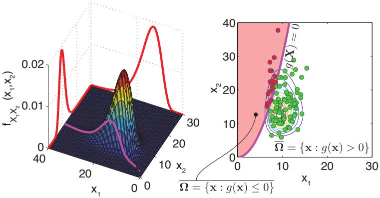
Estimation de p_f - formulation

Fonction indicatrice:

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Espérance mathématique de p_f :

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{\boldsymbol{\Omega}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{x}} I(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \mathbb{E}[I(\mathbf{X})] = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} I(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$



$$\hat{p}_{f,MC} = \widehat{\mathbb{E}[I(\mathbf{X})]} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} I(\mathbf{x}_i)$$

Propriétés de l'estimateur $\hat{p}_{f,MC}$

1 - Espérance mathématique de $\hat{p}_{f,MC}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{p}_{f,MC}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(\mathbf{X}_i)\right] \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left[I(\mathbf{X}_i)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[I(\mathbf{X})\right] \\
&= p_f \text{ (estimateur non biaisé)}
\end{aligned}$$

Propriétés de l'estimateur $\hat{p}_{f,MC}$

2 - Variance de $\hat{p}_{f,MC}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\hat{p}_{f,MC}] &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(\mathbf{X}_i)\right] \quad (\text{Note: } \mathrm{Var}[aX+b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]) \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Var}\left[I(\mathbf{X}_i)\right] = \frac{1}{m^2}\left(m\,\mathrm{Var}\left[I(\mathbf{X})\right]\right) \\
&= \frac{1}{m}\mathrm{Var}\left[I(\mathbf{X})\right] = \frac{1}{m}\left(\underbrace{\mathbb{E}[\overbrace{I(\mathbf{X})^2}^{=I(\mathbf{X})}]}_{=p_f} - \underbrace{\mathbb{E}\left[I(\mathbf{X})\right]^2}_{=p_f^2}\right) \\
&= \frac{1}{m}(p_f - p_f^2)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}[\hat{p}_{f,MC}]$: *indépendant du nombre de dimensions/variables*

Propriétés de l'estimateur $\hat{p}_{f,MC}$

3 - Coefficient de variation de $\hat{p}_{f,MC}$

$$\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{p}_{f,MC}]}}{\mathbb{E}[\hat{p}_{f,MC}]} = \frac{\sqrt{\frac{1}{m}(p_f - p_f^2)}}{p_f} = \sqrt{\frac{1-p_f}{m \cdot p_f}}$$

Le nombre d'échantillons m requis afin d'atteindre une valeur cible de $\delta_{\hat{p}_{f,MC}}$ est donné par

$$m = \frac{1-p_f}{p_f \delta^2_{\hat{p}_{f,MC}}}$$

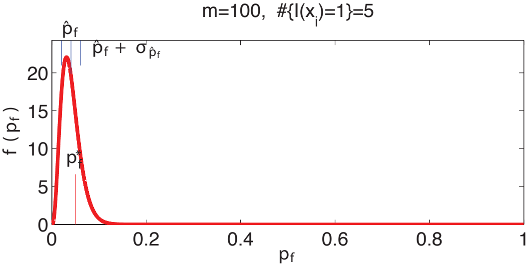
Propriétés de l'estimateur $\hat{p}_{f,MC}$ [.m]

4 - $f(\hat{p}_{f,MC})$ La densité de probabilité de p_f estimée à partir de $i = 1, \cdots, m$ échantillons Monté Carlo est:

$$f(p_f) = \text{Beta}(a,b) = \frac{1}{\mathcal{B}(a,b)} p_f^{a-1}(1-p_f)^{b-1}, \; p_f \in (0,1)$$

où $\mathcal{B}(a,b)$ est la fonction Beta,

$$a = \#\{I(\mathbf{x}_i) = 1\} \text{ et } b = \#\{I(\mathbf{x}_i) = 0\}$$

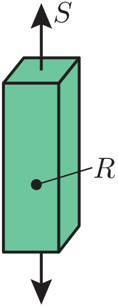


Plan de la section

Exemple #4.2 (Réf. Ex. 2.2) [ ]

Soit D et S deux variables aléatoires log normales où:

$$D\begin{cases}\mu_D &= 10\,\text{mm}\\ \sigma_D &= 2\,\text{mm}\end{cases},\; S\begin{cases}\mu_S &= 15\,\text{kN}\\ \sigma_S &= 5\,\text{kN}\end{cases},\, f_y = 300\,MPa,\; D \perp\!\!\!\perp S$$

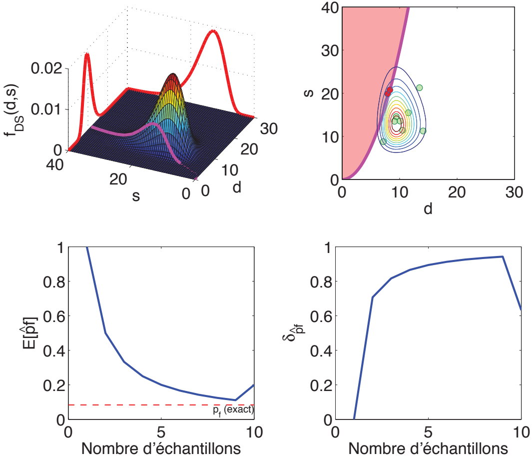


$$R(\mathbf{X}) = R(D, f_y) = D^2 f_y,\;\; g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

$$p_f = \int_{\boldsymbol{\Omega}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_0^{\infty}\int_{d^2 f_y}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dsdd \approx 0.0838$$

Exemple #4.2 (Réf. Ex. 2.2) [.m]

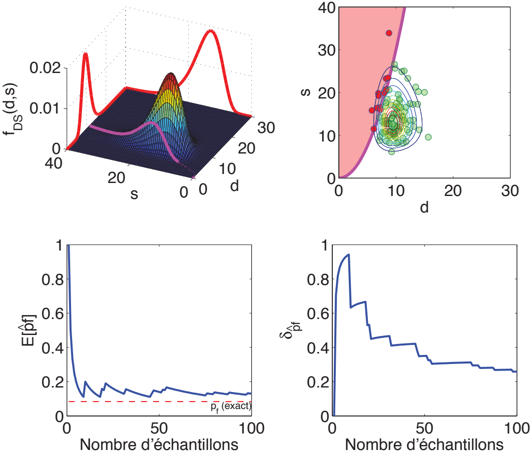
Pour $m = 10$
$\hat{p}_{f,MC} = 0.20$,
$(\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.65)$



Exemple #4.2 (Réf. Ex. 2.2) []

Pour $m = 100$
$\hat{p}_{f,MC} = 0.13$,
$(\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.27)$

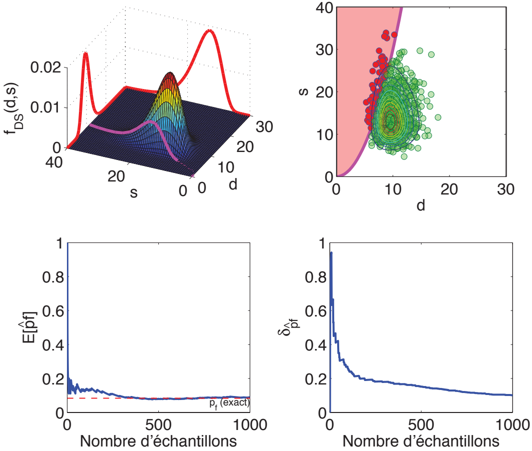
$$\boxed{p_f \approx 0.0838}$$



Exemple #4.2 (Réf. Ex. 2.2) [.m]

Pour $m = 1\,000$
$\hat{p}_{f,MC} = 0.0790$,
$(\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.11)$

$$\boxed{p_f \approx 0.0838}$$

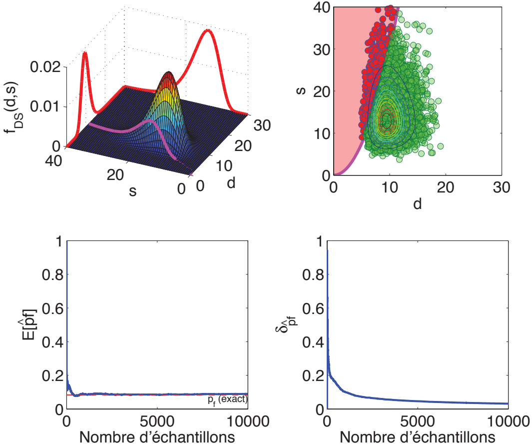


Exemple #4.2 (Réf. Ex. 2.2) [.m]

Pour $m = 10\,000$
$\hat{p}_{f,MC} = 0.0857$,
$(\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.03)$

Pour $m = 10^7$
$\hat{p}_{f,MC} = 0.0838$,
$(\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.001)$

$$\boxed{p_f \approx 0.0838}$$



Plan de la section

Échantillonnage

Comment générer des nombres aléatoires?

Pour une densité de probabilité

1. uniforme, $u_i : U \sim \mathcal{U}(0,1)$
2. quelconque, $x_i : X \sim f_X(x)$
3. multinormale, $\mathbf{x}_i : \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$
4. multivarié de type *Nataf*, $\mathbf{x}_i : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

1 - Densité de probabilité uniforme, $u_i : U \sim \mathcal{U}(0,1)$ [.m]

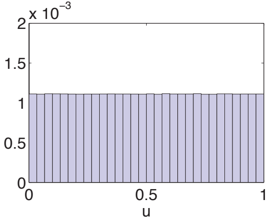
Les algorithmes utilisés afin de générer des nombres aléatoires sont habituellement basés sur la génération de nombres aléatoires pour $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ (i.e. densité de probabilité uniforme)

Exemple de générateur récursif:

$$\text{Pour } i = 1, 2, \cdots, N \left\{ \begin{array}{rcl} x_i & = & a x_{i-1} + b - m \left\lfloor \frac{a x_{i-1} + b}{m} \right\rfloor \\ u_i & = & x_i / m \end{array} \right.$$

Utiliser $a = 129$, $b = 1$, $m = 2^{35}$, et choisir une valeur initiale x_0.

$[\mathbf{u}_i]_{n \times m} =$`np.random.rand(n,m)`

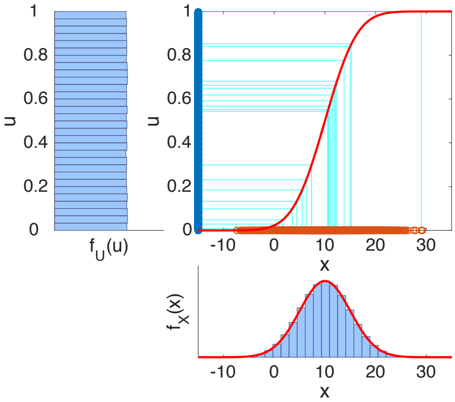


2 - Densité de probabilité quelconque, $x_i : X \sim f_X(x)$ [.m]

Soit une variable aléatoire X ayant une densité de probabilité $f_X(x)$ et une fonction de répartition $F_X(x)$.

$$U = F_X(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$$

$$\boxed{x_i = F_X^{-1}(u_i)}$$



3 - Densité de probabilité multinormale $\mathbf{x}_i : \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$

Procédure pour générer un échantillon multivarié $\mathbf{x}_i : \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$

1. Décomposer $\mathbf{\Sigma_{XX}} = \mathbf{D_X R_{XX} D_X}$ et $\mathbf{R_{XX}} = \mathbf{L_X L_X^\intercal}$
2. Générer un échantillon multivarié $\mathbf{y}_i : \mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$
3. $\mathbf{x}_i = \mathbf{L_X D_X y}_i + \mathbf{M_X}$

L: Matrice triangulaire inférieure

```
L=scipy.linalg.cholesky(R, lower=True)
```

$[\mathbf{x}_i]_{m\times n}$ =`np.random.multivariate_normal(M_x,S_X,m)`

4 - Densité de probabilité multivariée Nataf, $\mathbf{x}_i : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

Soit un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^\intercal$ ayant une densité de probabilité conjointe (*Nataf*) et les fonctions de répartition marginales $F_{X_i}(x_i)$.

Procédure pour générer un échantillon multivarié $\mathbf{x}_i : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

1. Générer un ensemble d'échantillons $\mathbf{z}_i : \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_0)$

> $\mathbf{R}_0$: Matrice de corrélation pour les V.A. intermédiaires $\mathbf{Z}$

2. Calculer $x_i = F_{X_i}^{-1}[\Phi(z_i)]$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} F_1^{-1}[\Phi(z_1)] \\ \vdots \\ F_n^{-1}[\Phi(z_n)] \end{array} \right\}$$

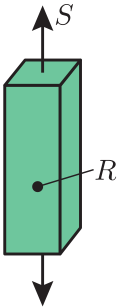
Plan de la section

Exemple #4.3

Soit $X_1 = D \sim \ln\mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: distribution conjointe de type **Nataf**

$$D\left\{\begin{array}{lcl}\mu_D & = & 10\,\text{mm}\\ \sigma_D & = & 2\,\text{mm}\end{array}\right., S\left\{\begin{array}{lcl}\mu_S & = & 15\,\text{kN}\\ \sigma_S & = & 5\,\text{kN}\end{array}\right., f_y = 300\ MPa,\ \rho_{D,S} = 0.30$$



$$\mathbf{X} = \left\{\begin{array}{c} D \\ S \end{array}\right\},\ \mathbf{M_X} = \left\{\begin{array}{c} 10 \\ 15 \end{array}\right\}$$

$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y,\ g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

Densités de probabilité marginales []

X_1: Densité de probabilité log normale

$$\mu_{\ln X_1} = \ln \mu_{X_1} - \frac{\zeta_i^2}{2} = 2.28$$

$$\sigma_{\ln X_1} = \sqrt{\ln(1+\delta_{X_1}^2)} = 0.20$$

X_2: Densité de probabilité Gumbel (GEV, Type-I)

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\beta}\exp\left[-\frac{x_2-\mu}{\beta} - \exp\left\{-\frac{x_2-\mu}{\beta}\right\}\right]$$

$$F_{X_2}(x_2) = \exp\left[-\exp\left\{-\frac{x_2-\mu}{\beta}\right\}\right]$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \mu_{X_2} & = & \mu+\beta\gamma \\ \sigma_{X_2}^2 & = & \dfrac{\pi^2\beta^2}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{lcl} \mu & = & 12.8 \\ \beta & = & 3.9 \end{array}$$

Densité de probabilité conjointe Nataf [ ]

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^{n} \frac{f_i(X_i)}{\phi(z_i)}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{0,X_1X_2} &= \rho_{X_1X_2}(1.029 + 0.001\rho_{X_1X_2} + 0.014\delta_{X_1} + \ldots \\
&\quad +0.004\rho^2_{X_1X_2} + 0.233\delta^2_{X_1} - 0.197\rho_{X_1X_2}\delta_{X_1}) \\
&= 0.31
\end{aligned}$$

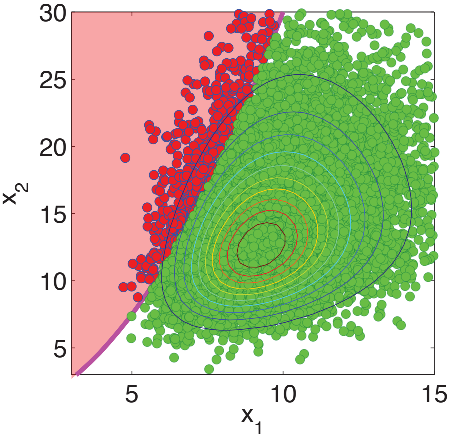
$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.31 \\ 0.31 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} F_1^{-1}[\Phi(z_1)] \\ \ldots \\ F_n^{-1}[\Phi(z_n)] \end{array} \right\}$$

Estimation de p_f

```
from scipy.stats import multivariate_normal, norm
import numpy as np

s_ln = lambda m,s : np.sqrt(np.log(1+(s/m)**2)) # std
x1Tz = lambda z1 : icdf('logn',normcdf(z1),m_lnX1,s_lnX1)
x2Tz = lambda z2 : icdf('gev',normcdf(z2),0,beta,mu)
xTz = lambda z : np.concatenate((x1Tz(z[1,:]),x2Tz(z[2,:])))
nb_MC_samples = 1E7
x_MCS=xTz(multivariate_normal.rvs(0*M_X,R_0,nb_MC_samples)')
I = gX(x_MCS)<=0
pfMC = np.sum(I)/nb_MC_samples
```

Résultats [ ]



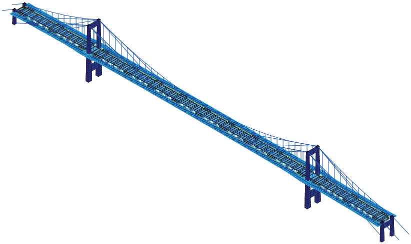
Pour $m = 10^7$ échantillons,

$$\hat{p}_{f,MC} \approx 0.049 \; (\delta_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.0014)$$

Plan de la section

Limitations

Il est commun que la fonction d'état limite $g(\mathbf{X})$ implique des modèles numériques complexes (e.g. modèles éléments finis)

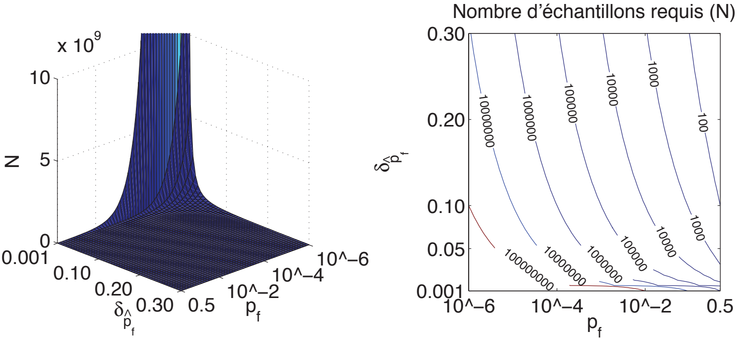


Lorsque l'évaluation de $g(\mathbf{x}_i) > 10^{-3}\,s$ et/où $p_f \ll 0.01$, il n'est plus pratique d'évaluer un nombre (N) d'échantillons suffisant

$$\boxed{N = \frac{1 - p_f}{p_f \delta_{p_f}^2}}$$

Limitations [.m]

Nombre d'échantillons requis, $N = \dfrac{1 - p_f}{p_f \delta_{p_f}^2}$



Limitations - solutions

Solutions lorsque l'évaluation de $g(\mathbf{x}_i) > 10^{-3}\,s$ et/où $p_f \ll 0.01$

- Approximation analytiques
(Modules 5-7, e.g. FOSM, FORM, SORM)
- Méthodes d'échantillonnage avancées
(Module 12 , e.g. Importance sampling, Directional sampling, ACER, etc.)

Résumé

- L'échantillonnage Monte Carlo nous permet d'approximer (facilement) p_f (i.e. intégration numérique).

$$\hat{p}_{f,MC} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(\mathbf{x}_i)$$

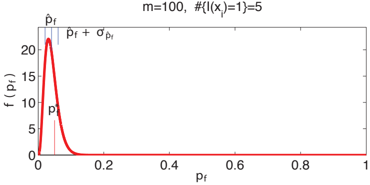
- La méthode est indépendante du nombre de variables aléatoires.

$$\mathrm{Var}[\hat{p}_{f,MC}] = \frac{1}{m}(p_f - p_f^2)$$

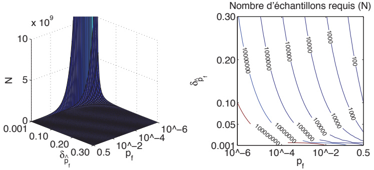
- La précision de cette approximation dépend du nombre d'échantillons.

$$m = \frac{1-p_f}{p_f\,\delta^2_{\hat{p}_{f,MC}}}$$

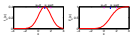
- L'évolution de $\hat{p}_{f,MC}$ peut être modélisé par la loi Beta.



- Application limitée lorsque l'évaluation de $g(\mathbf{x}_i) > 10^{-3}\,s$ et/où $p_f \ll 0.01$



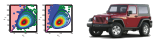
Théorie probabilité

- 0 Révision algèbre & probabilités 
- 1 Lois de probabilités 
- 3 PDF multivariés 

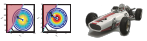
Fiabilité des structures & systèmes

- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes 
- 9 Formulation fiabilité systèmes 

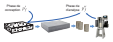
Estimation – p_f échantillonnage

- 4 Monte Carlo 
- 12 Échantillonnage par importance 

Estimation – p_f analytique

- 5 FOSM 
- 6 FORM 
- 8 SORM 

Utilisation des résultats

- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques 
- 11 Données empiriques 
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques