

Module #3

Distribution multivariées

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

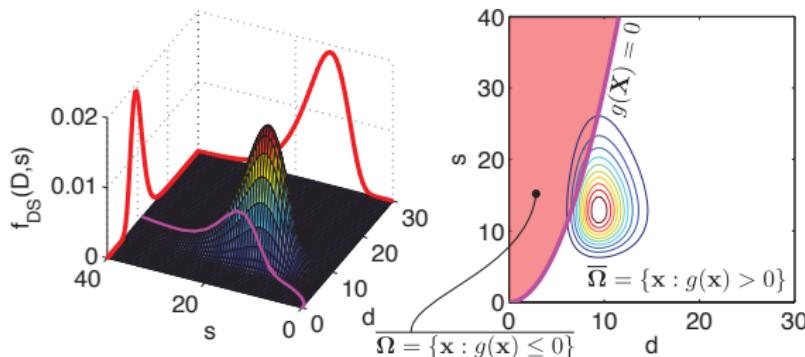
Département des génies civil, géologique et des mines

© Polytechnique Montréal



Chapitre 3 - A. Der Kiureghian, (2014), *Structural and System Reliability (manuscript)*. Department of Civil and Environmental Engineering, UC Berkeley

Pourquoi?



Comment modéliser $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ si $f_{X_1}(x_1)$ et $f_{X_2}(x_2)$ ont des densités de probabilités marginales différentes?

Par exemple: X_1 à une distribution de type Gamma, X_2 suit une loi normale et $\rho_{X_1, X_2} = 0.6$.

Question: Comment définit-on $f_X(x)$ et $F_X(x)$?

📍 Plan du module #3

Introduction

Loi Morgenstern

Loi Nataf

Résumé

Organisation de la matière

Théorie probabilité

- 0 Révision algèbre & probabilités
- 1 Lois de probabilités
- 3 PDF multivariés

Fiabilité des structures & systèmes

- 2 Formulation fiabilité composantes $g_1(X)$
- 9 Formulation fiabilité systèmes

Estimation – p_f échantillonnage

- 4 Monte Carlo
- 12 Échantillonnage par importance

Estimation – p_f analytique

- 5 FOSM
- 6 FORM
- 8 SORM

Utilisation des résultats



- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques
- 11 Données empiriques
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques

 Plan de la section

Loi Morgenstern

- 2.1 Définition – CDF/PDF
 - 2.2 Corrélation - α_{ij}
 - 2.3 Cas multivarié ($N > 2$)
 - 2.4 Exemple
 - 2.5 Propriétés
-

Loi Morgenstern bivarié

Soit deux variables aléatoires X_1, X_2

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)\{1 + \alpha_{12}[1 - F_1(x_1)][1 - F_2(x_2)]\}$$

(Rappel: $F_{X_1 X_2}(x_1, \infty) = F_1(x_1)$ et $F_{X_1 X_2}(\infty, x_2) = F_2(x_2)$)

En dérivant le CDF, on obtient le PDF

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)\{1 + \alpha_{12}[1 - 2F_1(x_1)][1 - 2F_2(x_2)]\}$$

$-1 \leq \alpha_{12} \leq 1$ contrôle la corrélation entre X_1, X_2

Loi Morgenstern bivariée - α_{12} ?

Soit deux variables aléatoires X_1, X_2

$$\rho_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\rho_{12} = 4\alpha_{12} Q_1 Q_2$$

où

$$Q_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) f_i(x_i) F_i(x_i) dx_i$$

donc

$$\alpha_{12} = \frac{\rho_{12}}{4Q_1 Q_2}$$

Corrélation - α_{ij}

Loi Morgenstern bivariée - Q_j

Distribution	CDF	Standardization	Q
Normal	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.282$
Uniform	$\frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$	$u = \frac{x-a}{b-a}$	$\frac{\sqrt{3}}{6} = 0.289$
Shifted exponential	$1 - \exp[-\alpha(x-x_0)], x_0 \leq x$	$u = \alpha(x-x_0)$	$\frac{1}{4} = 0.25$
Shifted Rayleigh	$1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^2\right], x_0 \leq x$	$u = \frac{x-x_0}{\alpha}$	$\frac{\sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi}}{\sqrt{32-8\pi}} = 0.280$
Type I largest value	$\exp\{-\exp[-\alpha(x-v)]\}$	$u = \alpha(x-v)$	$\frac{\sqrt{6} \ln 6}{2\pi} = 0.699$
Type I smallest value	$1 - \exp\{-\exp[\alpha(x-v)]\}$	$u = \alpha(x-v)$	$\frac{\sqrt{6} \ln 2}{2\pi} = 0.270$
Lognormal	$\Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right), \quad 0 < x$	NA	$\frac{2\Phi(\zeta/\sqrt{2}) - 1}{2\sqrt{\exp(\zeta^2) - 1}} < 0.282$
Gamma	$\frac{\Gamma(k, \lambda x)}{\Gamma(k)}, \quad 0 < x$	NA	$\frac{\Gamma(2k)}{4^k \sqrt{k} \Gamma^2(k)} < 0.282$
Type II largest value	$\exp\left[-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right], \quad 0 < x$	NA	$\frac{(2^{1/k} - 1)\Gamma(1 - 1/k)}{2\sqrt{\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma^2(1 - 1/k)}} < 0.270$
Type III smallest value	$1 - \exp\left[-\left(\frac{x-e}{v-e}\right)^k\right], \quad e < x$	NA	$\frac{(1 - 2^{1/k})\Gamma(1 + 1/k)}{2\sqrt{\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma^2(1 + 1/k)}} < 0.270$

P-L. Liu, and A. Der Kiureghian (1986). Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. Probabilistic Engineering Mechanics, 1(2), 105-112.

Loi Morgenstern multivariée

Soit n variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left[\prod_i F_i(x_i) \right] \left\{ 1 + \sum_{i < j}^n \alpha_{ij}[1 - F_i(x_i)][1 - F_j(x_j)] + \sum_{i < j < k}^n \alpha_{ijk}[1 - F_i(x_i)][1 - F_j(x_j)][1 - F_k(x_k)] + \dots \right\}$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left[\prod_i f_i(x_i) \right] \left\{ 1 + \sum_{i < j}^n \alpha_{ij}[1 - 2F_i(x_i)][1 - 2F_j(x_j)] + \sum_{i < j < k}^n \alpha_{ijk}[1 - 2F_i(x_i)][1 - 2F_j(x_j)][1 - 2F_k(x_k)] + \dots \right\}$$

Loi Morgenstern multivariée (cont.)

Soit n variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$$\alpha_{12\dots k} = \frac{\rho_{12\dots k}}{(-2)^k Q_1 Q_2 \dots Q_k}$$

$$\rho_{12\dots k} = E \left[\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \dots \left(\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \right) \right]$$

en pratique: $\rho_{12\dots k} = 0$

Limitation: La loi Morgenstern multivariée n'est valide que pour

$$-0.336 \leq \rho_{ij} \leq +0.336$$

Exemple #3.1 - Morgenstern multivarié

Soit X_1 une variable aléatoire de type Rayleigh

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{x_1}{\sigma_1^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2\right], \quad F_{X_1}(x_1) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

où le paramètre $\sigma_1 = 1$, et X_2 une variable aléatoire log normale

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{x_2 \sqrt{2\pi\zeta}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta}\right)^2\right], \quad F_{X_2}(X_2) = \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta}\right)$$

où les paramètres $\lambda = 0$ et $\zeta = 0.3$ et $\rho_{12} = 0.307$

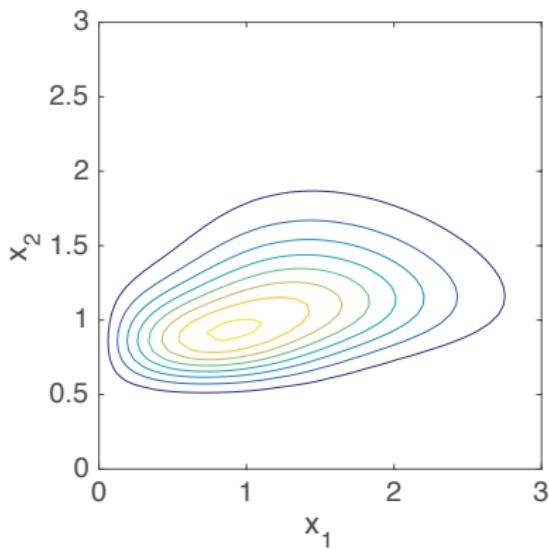
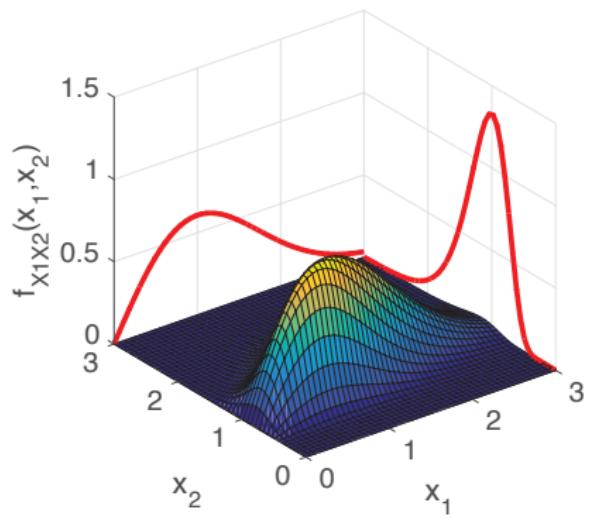
$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)\{1 + \alpha_{12}[1 - 2F_1(x_1)][1 - 2F_2(x_2)]\}$$

Exemple #3.1 - Morgenstern multivarié (cont.)

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \overbrace{\frac{x_1}{\sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1^2} \right)^2 \right]}^{f_{X_1}(x_1)} \times \overbrace{\frac{1}{x_2 \sqrt{2\pi} \zeta} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta} \right)^2 \right]}^{f_{X_2}(x_2)} \times \\ \left\{ 1 + \alpha_{12} \underbrace{\left[2 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) - 1 \right]}_{1 - 2F_{X_1}(x_1)} \underbrace{\left[1 - 2\Phi \left(\frac{x_2 - \lambda}{\zeta} \right) \right]}_{1 - 2F_{X_2}(x_2)} \right\}$$

$$\alpha_{12} = \frac{\overbrace{0.307}^{\rho_{12}}}{4 \times \underbrace{0.280}_{Q_1} \times \underbrace{\frac{\Phi(0.3/\sqrt{2}) - 0.5}{\sqrt{\exp(0.3^2) - 1}}}_{Q_2}} = 1$$

Exemple #3.1 - Morgenstern multivarié (cont-2) [m]



Loi Morgenstern multivariée - propriétés

1. Compatible avec n'importe quel ensemble de distributions marginales
2. ⚠ Limitée aux cas où $-0.336 \leq \rho_{ij} \leq +0.336$

🗺 Plan de la section

Loi Nataf

- 3.1 Définition
 - 3.2 Corrélation
 - 3.3 Exemple
 - 3.4 Propriétés
-

Loi Nataf multivariée - Principe fondamental

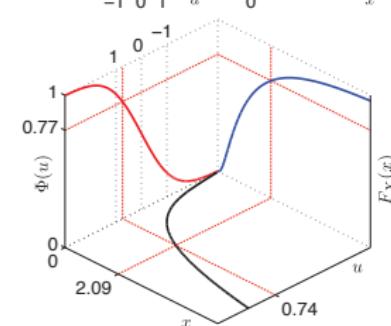
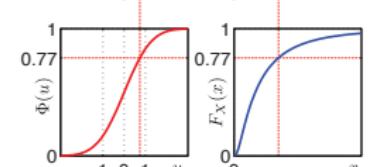
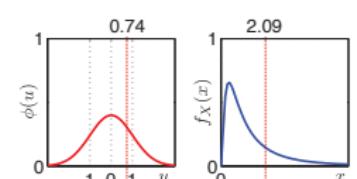
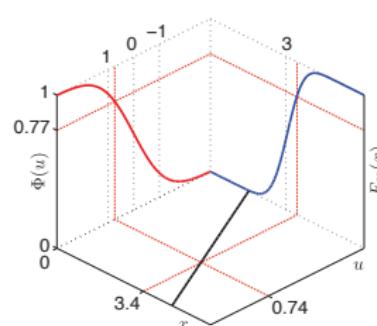
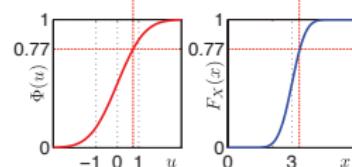
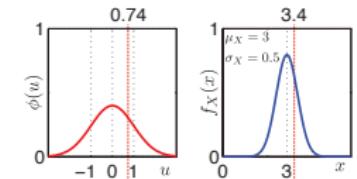
Soit les distributions marginales $X_i \sim f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

On transforme chacune des distributions marginales dans l'espace normal centré réduit (NCR)

$$Z_i \sim \phi(z_i)$$

$$\Phi(z_i) = F_i(x_i) \boxed{z_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)]}$$

Transformation dans l'espace NCR [m] [m]



Loi Nataf multivariée

Soit les distributions marginales $X_i \sim f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, ρ_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, et soit un ensemble correspondant de variables aléatoires **normales centrées réduites** $Z_i \sim \phi(z_i)$.

$$z_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)]$$

À partir de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z}$, on obtient

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \left| \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{x}} \right| = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^n \frac{f_i(x_i)}{\phi(z_i)}, \quad F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \Phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0)$$

Il ne reste qu'à identifier la matrice de corrélation $\mathbf{R}_0 \neq \mathbf{R}$

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{0,12} & \cdots & \rho_{0,1n} \\ & 1 & \cdots & \rho_{0,2n} \\ & & \vdots & \rho_{0,n-1n} \\ \text{sym.} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{ij} = \text{fonction}(\rho_{0,ij})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \phi_2(z_i, z_j, \rho_{0,ij}) dz_i dz_j$$

- En général, $|\rho_{ij}| \leq |\rho_{0,ij}|$.
- Il n'y a pas de solution directe liant ρ_{ij} et $\rho_{0,ij}$
- **Résolution numérique inverse** (i.e. Tables)

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0 (cont.)

$$\rho_{0,ij} = C\rho_{ij}, \quad C \geq 1$$

X_i	X_j	C
Normale	Normale	1
Normale	Groupe 1	constante ≥ 1
Normale	Groupe 2	$C(\delta_j)$
Groupe 1	Groupe 1	$C(\rho_{ij})$
Groupe 1	Groupe 2	$C(\rho_{ij}, \delta_j)$
Groupe 2	Groupe 2	$C(\rho_{ij}, \delta_i, \delta_j)$

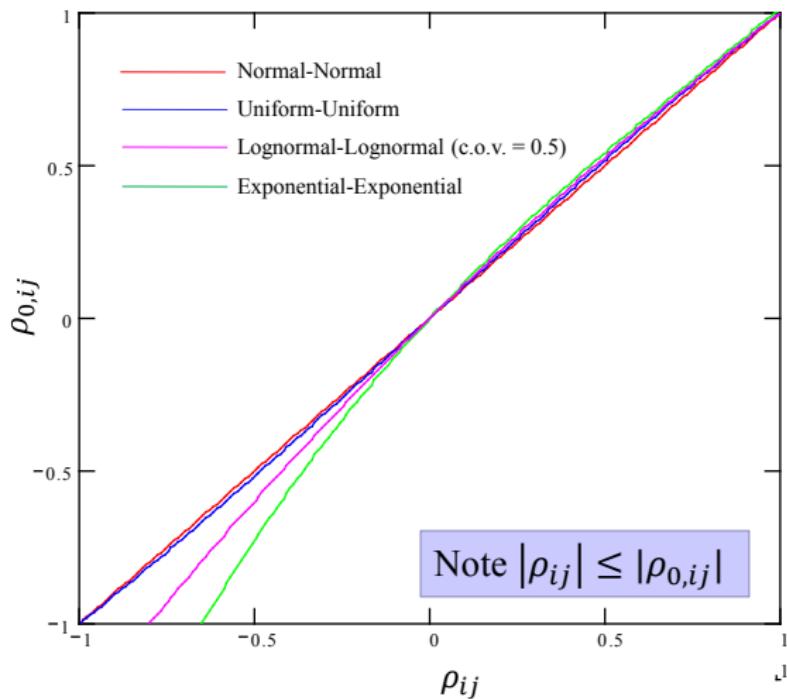
Groupe 1: Distributions linéairement normalisable

e.g. normale, uniforme, exponentielle, Rayleigh, ...

Groupe 2: Distributions non-linéairement normalisable

e.g., log normale, gamma, ...

Distributions linéairement normalisable



[Der Kiureghian (2013)]

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0 (cont.2)

X_i normal, X_j group 1

Distribution of X_j	C
Uniform	1.023
Shifted exponential	1.107
Shifted Rayleigh	1.014
Type I largest value	1.031
Type I smallest value	1.031

X_i normal, X_j group 2

Distribution of X_j	C
Lognormal	$\frac{\delta_j}{\sqrt{\ln(1+\delta_j^2)}}$
Gamma	$1.001 - 0.007\delta_j + 0.118\delta_j^2$
Type II largest value	$1.030 + 0.238\delta_j + 0.364\delta_j^2$
Type III smallest value	$1.031 - 0.195\delta_j + 0.328\delta_j^2$

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0 (cont.3)

Both X_i and X_j group 1

Distribution of X_i	Distribution of X_j				
	Uniform	Shifted exponential	Shifted Rayleigh	Type I largest vale	Type I smallest value
Uniform	$1.047 - 0.047\rho^2$				
Shifted exponential	$1.133 + 0.029\rho^2$	$1.229 - 0.367\rho + 0.153\rho^2$			
Shifted Rayleigh	$1.038 - 0.008\rho^2$	$1.123 - 0.100\rho + 0.021\rho^2$	$1.028 - 0.029\rho$		
Type I largest value	$1.055 + 0.015\rho^2$	$1.142 - 0.154\rho + 0.031\rho^2$	$1.046 - 0.045\rho + 0.006\rho^2$	$1.064 - 0.069\rho + 0.005\rho^2$	
Type I smallest value	$1.055 + 0.015\rho^2$	$1.142 + 0.154\rho + 0.031\rho^2$	$1.046 + 0.045\rho + 0.006\rho^2$	$1.064 + 0.069\rho + 0.005\rho^2$	$1.064 - 0.069\rho + 0.005\rho^2$

[Der Kiureghian (2013)]

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0 (cont.4)

X_i group 1, X_j group 2

Distribution of X_i	Distribution X_j			
	Lognormal	Gamma	Type II largest value	Type II smallest value
Uniform	$1.019 + 0.014\delta_j + 0.010\rho^2 + 0.249\delta_j^2$	$1.023 - 0.007\delta_j + 0.002\rho^2 + 0.127\delta_j^2$	$1.033 + 0.305\delta_j + 0.074\rho^2 + 0.405\delta_j^2$	$1.061 - 0.237\delta_j - 0.005\rho^2 + 0.379\delta_j^2$
Shifted exponential	$1.098 + 0.003\rho + 0.019\delta_j + 0.025\rho^2 + 0.303\delta_j^2 - 0.437\rho\delta_j$	$1.104 + 0.003\rho - 0.008\delta_j + 0.014\rho^2 + 0.173\delta_j^2 - 0.296\rho\delta_j$	$1.109 - 0.152\rho + 0.361\delta_j + 0.130\rho^2 + 0.455\delta_j^2 - 0.728\rho\delta_j$	$1.147 + 0.145\rho - 0.271\delta_j + 0.010\rho^2 + 0.459\delta_j^2 - 0.467\rho\delta_j$
Shifted Rayleigh	$1.011 + 0.001\rho + 0.014\delta_j + 0.004\rho^2 + 0.231\delta_j^2 - 0.130\rho\delta_j$	$1.104 + 0.001\rho - 0.007\delta_j + 0.002\rho^2 + 0.126\delta_j^2 - 0.090\rho\delta_j$	$1.036 - 0.038\rho + 0.266\delta_j + 0.028\rho^2 + 0.383\delta_j^2 - 0.229\rho\delta_j$	$1.047 + 0.042\rho - 0.212\delta_j + 0.353\delta_j^2 - 0.136\rho\delta_j$
Type I largest value	$1.029 + 0.001\rho + 0.014\delta_j + 0.004\rho^2 + 0.233\delta_j^2 - 0.197\rho\delta_j$	$1.031 + 0.001\rho - 0.007\delta_j + 0.003\rho^2 + 0.131\delta_j^2 - 0.132\rho\delta_j$	$1.056 - 0.060\rho + 0.263\delta_j + 0.020\rho^2 + 0.383\delta_j^2 - 0.332\rho\delta_j$	$1.064 + 0.065\rho - 0.210\delta_j + 0.003\rho^2 + 0.356\delta_j^2 - 0.211\rho\delta_j$
Type I smallest value	$1.029 - 0.001\rho + 0.014\delta_j + 0.004\rho^2 + 0.233\delta_j^2 + 0.197\rho\delta_j$	$1.031 - 0.001\rho - 0.007\delta_j + 0.003\rho^2 + 0.131\delta_j^2 + 0.132\rho\delta_j$	$1.056 + 0.060\rho + 0.263\delta_j + 0.020\rho^2 + 0.383\delta_j^2 + 0.332\rho\delta_j$	$1.064 - 0.065\rho - 0.210\delta_j + 0.003\rho^2 + 0.356\delta_j^2 + 0.211\rho\delta_j$

[Der Kiureghian (2013)]

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0 (cont.5)

Both X_i and X_j group 2

Distribution of X_i	Distribution X_j			
	Lognormal	Gamma	Type II largest value	Type II smallest value
Lognormal	$\ln(1 + \rho\delta_i\delta_j)$ $\rho\sqrt{\ln(1 + \delta_i^2)\ln(1 + \delta_j^2)}$			
Gamma	$1.001 + 0.033\rho + 0.004\delta_i - 0.016\delta_j + 0.002\rho^2 + 0.223\delta_i^2 + 0.130\delta_j^2 + 0.0296\delta_i\delta_j - 0.104\rho\delta_i - 0.119\rho\delta_j$	$1.002 + 0.022\rho - 0.012(\delta_i + \delta_j) + 0.001\rho^2 + 0.125(\delta_i^2 + \delta_j^2) + 0.014\delta_i\delta_j - 0.077\rho(\delta_i + \delta_j)$		
Type II largest value	$1.026 + 0.082\rho - 0.019\delta_i + 0.222\delta_j + 0.018\rho^2 + 0.288\delta_i^2 + 0.379\delta_j^2 + 0.126\delta_i\delta_j - 0.441\rho\delta_i - 0.277\rho\delta_j$	$1.029 + 0.056\rho - 0.030\delta_i + 0.225\delta_j + 0.012\rho^2 + 0.174\delta_i^2 + 0.379\delta_j^2 + 0.075\delta_i\delta_j - 0.313\rho\delta_i - 0.182\rho\delta_j$	$1.086 + 0.054\rho + 0.104(\delta_i + \delta_j) - 0.055\rho^2 + 0.662(\delta_i^2 + \delta_j^2) + 0.203\delta_i\delta_j - 0.570\rho(\delta_i + \delta_j) - 0.020\rho^3 - 0.218(\delta_i^2 + \delta_j^2) - 0.371\rho(\delta_i^2 + \delta_j^2) + 0.257\rho^2(\delta_i + \delta_j) + 0.141\delta_i\delta_j(\delta_i + \delta_j)$	
Type III smallest value	$1.031 + 0.052\rho + 0.011\delta_i - 0.210\delta_j + 0.002\rho^2 + 0.220\delta_i^2 + 0.350\delta_j^2 + 0.009\delta_i\delta_j + 0.005\rho\delta_i - 0.174\rho\delta_j$	$1.032 + 0.034\rho - 0.007\delta_i - 0.202\delta_j + 0.121\delta_i^2 + 0.339\delta_j^2 + 0.003\delta_i\delta_j - 0.006\rho\delta_i - 0.111\rho\delta_j$	$1.065 + 0.146\rho + 0.241\delta_i - 0.259\delta_j + 0.013\rho^2 + 0.372\delta_i^2 + 0.435\delta_j^2 + 0.034\delta_i\delta_j + 0.005\rho\delta_i - 0.481\rho\delta_j$	$1.063 - 0.004\rho - 0.200(\delta_i + \delta_j) - 0.001\rho^2 + 0.337(\delta_i^2 + \delta_j^2) - 0.007\delta_i\delta_j + 0.007\rho(\delta_i + \delta_j)$

[Der Kiureghian (2013)]

Loi Nataf multivariée - \mathbf{R}_0 Plage de valeurs admissibles

Marginal distribution						
Marginal distribution	Normal	Uniform	Shifted exponential	Shifted Rayleigh	Type I largest	Type I smallest
Normal	[−1,1]					
Uniform	[−0.977,0.977]	[−1,1]				
Shifted exponential	[−0.903,0.903]	[−0.866,0.866]	[−0.645,1]			
Shifted Rayleigh	[−0.986,0.986]	[−0.970,0.970]	[−0.819,0.957]	[−0.947,1]		
Type I largest	[−0.969,0.969]	[−0.936,0.936]	[−0.760,0.981]	[−0.915,0.993]	[−0.886,1]	
Type I smallest	[−0.969,0.969]	[−0.936,0.936]	[−0.981,0.780]	[−0.983,0.915]	[−1,0.886]	[−0.886,1]

[Der Kiureghian (2013)]

Exemple #3.2 - Nataf multivariée

Soit X_1 une variable aléatoire de type Rayleigh

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{x_1}{\sigma_1^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 \right], \quad F_{X_1}(x_1) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 \right]$$

où le paramètre $\sigma_1 = 1$, et X_2 une variable aléatoire log normale

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{x_2 \sqrt{2\pi\zeta}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta} \right)^2 \right], \quad F_{X_2}(X_2) = \Phi \left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta} \right)$$

où les paramètres $\lambda = 0$ et $\zeta = 0.3$ et $\rho_{12} = 0.307$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^n \frac{f_i(x_i)}{\phi(z_i)}$$

Exemple #3.2 - Nataf multivariée (cont.)

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^n \frac{f_i(x_i)}{\phi(z_i)}$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{x_1}{\sigma_1^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 \right]}_{f_{X_1}(x_1)} \times \underbrace{\frac{1}{x_2 \sqrt{2\pi}\zeta} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta} \right)^2 \right]}_{f_{X_2}(x_2)} \times \frac{\phi_2(z_1, z_2, \rho_{0,12})}{\phi(z_1)\phi(z_2)}$$

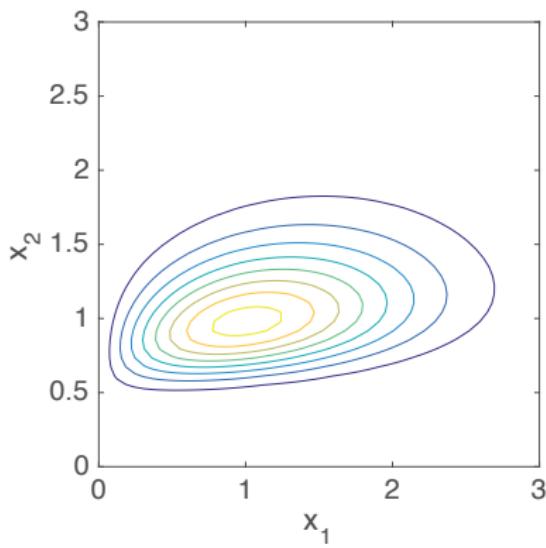
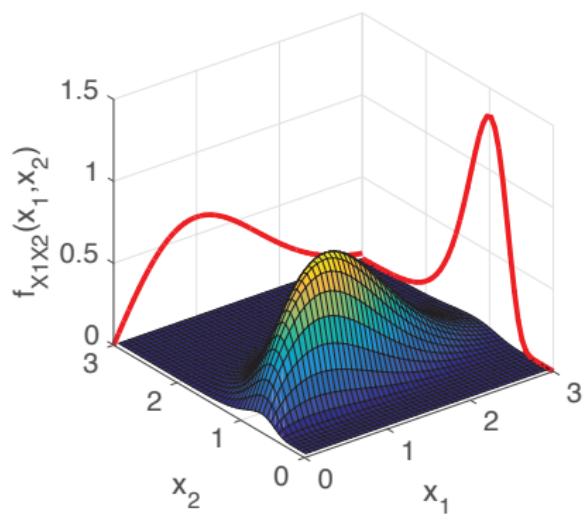
$$z_1 = \Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)] = \Phi^{-1} \left(1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \right)$$

$$z_2 = \Phi^{-1}[F_{X_2}(x_2)] = \Phi^{-1} \left(\Phi \left(\frac{\ln x_2 - \lambda}{\zeta} \right) \right)$$

$$C = 1.011 + 0.001\rho_{12} + 0.014\delta_2 + 0.004\rho_{12}^2 + 0.231\delta_2^2 - 0.130\rho_{12}\delta_2 = 1.024$$

$$\rho_{0,12} = C \cdot \rho_{ij} = 0.315$$

Exemple #3.2 - Nataf multivariée (cont. 2) [m A]



Loi Nataf multivariée – propriétés

1. Compatible avec n'importe quel ensemble de distributions marginales dont le CDF est monotoniquement croissant et dérivable
2. La plage de valeurs de corrélation admissible est plus large que pour la loi Morgenstern

Marginal distribution						
Marginal distribution	Normal	Uniform	Shifted exponential	Shifted Rayleigh	Type I largest	Type I smallest
Normal	[−1,1]					
Uniform	[−0.977,0.977]	[−1,1]				
Shifted exponential	[−0.903,0.903]	[−0.866,0.866]	[−0.645,1]			
Shifted Rayleigh	[−0.986,0.986]	[−0.970,0.970]	[−0.819,0.957]	[−0.947,1]		
Type I largest	[−0.969,0.969]	[−0.936,0.936]	[−0.760,0.981]	[−0.915,0.993]	[−0.886,1]	
Type I smallest	[−0.969,0.969]	[−0.936,0.936]	[−0.981,0.780]	[−0.983,0.915]	[−1,0.886]	[−0.886,1]

[Der Kiureghian, (2013)]

Résumé

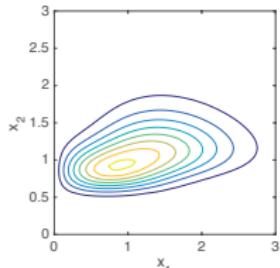
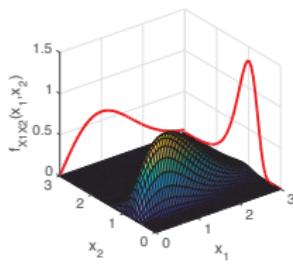
Loi Morgenstern bivariée:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)\{1+\alpha_{12}[1-2F_1(x_1)][1-2F_2(x_2)]\}$$

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)\{1 + \alpha_{12}[1 - F_1(x_1)][1 - F_2(x_2)]\}$$

$$-1 < \alpha_{12} < 1$$

$$\alpha_{12} = \frac{\rho_{12}}{4Q_1 Q_2}$$



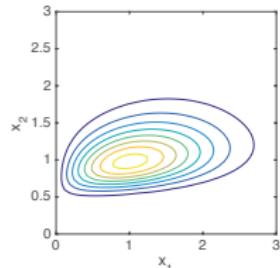
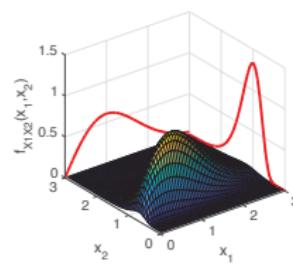
Loi Nataf multivariée

$$z_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)]$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0) \prod_{i=1}^n \frac{f_i(X_i)}{\phi(z_i)}$$

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \Phi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_0)$$

$$\rho_{0,ij} = C \rho_{ij}, \quad C \geq 1$$



<i>Théorie probabilité</i>	<table border="0"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td><td>Révision algèbre & probabilités </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td>Lois de probabilités </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td>PDF multivariés </td></tr></table>	0	Révision algèbre & probabilités 	1	Lois de probabilités 	3	PDF multivariés 				
0	Révision algèbre & probabilités 										
1	Lois de probabilités 										
3	PDF multivariés 										
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	<table border="0"><tr><td colspan="2">Introduction</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td>Formulation fiabilité composantes </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td><td>Formulation fiabilité systèmes </td></tr></table>	Introduction		2	Formulation fiabilité composantes 	9	Formulation fiabilité systèmes 				
Introduction											
2	Formulation fiabilité composantes 										
9	Formulation fiabilité systèmes 										
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	<table border="0"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td><td>Monte Carlo </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</td><td>Échantillonnage par importance </td></tr></table>	4	Monte Carlo  	12	Échantillonnage par importance   						
4	Monte Carlo  										
12	Échantillonnage par importance   										
<i>Estimation – p_f analytique</i>	<table border="0"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</td><td>FOSM </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</td><td>FORM </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td><td>SORM </td></tr></table>	5	FOSM   	6	FORM   	8	SORM   				
5	FOSM   										
6	FORM   										
8	SORM   										
<i>Utilisation des résultats</i> 	<table border="0"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td><td>Analyse de sensibilité</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</td><td>Incertitudes aléatoires & épistémiques </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</td><td>Données empiriques </td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13</td><td>Prise de décision</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">14</td><td>Métamodèles & modèles empiriques</td></tr></table>	7	Analyse de sensibilité	10	Incertitudes aléatoires & épistémiques 	11	Données empiriques   	13	Prise de décision	14	Métamodèles & modèles empiriques
7	Analyse de sensibilité										
10	Incertitudes aléatoires & épistémiques 										
11	Données empiriques   										
13	Prise de décision										
14	Métamodèles & modèles empiriques										