

Module #2

Formulation mathématique des problèmes de fiabilité

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

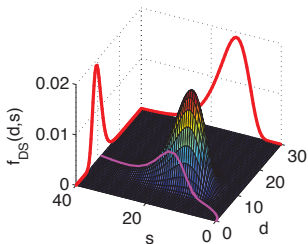
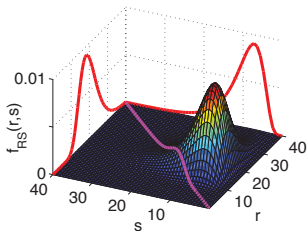
Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal



Chapitre 4 - A. Der Kiureghian, (2014), *Structural and System Reliability (manuscript)*. Department of Civil and Environmental Engineering, UC Berkeley

Pourquoi?



Comment formule-t-on des problèmes de fiabilité?

1. **Cas spécial:** fiabilité R, S
2. **Cas général:** fonction d'état limite



Plan du module #2

Introduction

Cas spécial: R, S

Choix de $f_X(x)$

Cas général: F.É.L.

Résumé

Organisation de la matière

<i>Théorie probabilité</i>	{	0	Révision algèbre & probabilités	
		1	Lois de probabilités	
		3	PDF multivariés	
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	{		Introduction	
		2	Formulation fiabilité composantes	$g_1(X)$
		9	Formulation fiabilité systèmes	
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	{	4	Monte Carlo	
		12	Échantillonnage par importance	
<i>Estimation – p_f analytique</i>	{	5	FOSM	
		6	FORM	
		8	SORM	
<i>Utilisation des résultats</i>	{	7	Analyse de sensibilité	
		10	Incertitudes aléatoires & épistémiques	
		11	Données empiriques	
		13	Prise de décision	
		14	Métamodèles & modèles empiriques	



Plan de la section

Cas spécial: R, S

2.1 Définition

2.2 Exemple

2.3 Méthode #1 - Densités de probabilité conditionnelles

2.4 Méthode #2 - Marge de sécurité

2.5 Méthode #3 - facteur de sécurité

2.6 Modélisation des évènements rares

Probabilité de défaillance - Cas spécial R, S

2 variables aléatoires:

R : Résistance (Capacité)

S : Sollicitation (Demande)

2 états possibles:

$\{R \leq S\}$: Défaillance (Rupture)

$\{R > S\}$: Survie

Probabilité de défaillance (ou de rupture, p_f):

$$p_f = \Pr(R \leq S)$$

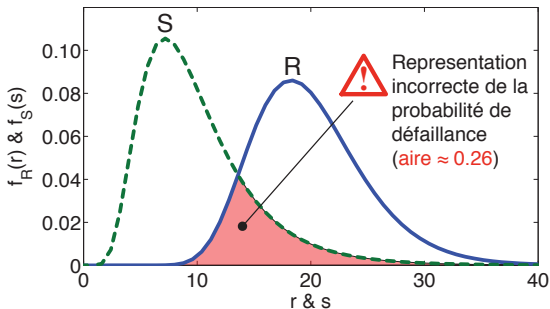
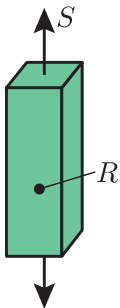
Fiabilité (ou probabilité de survie, $\overline{p_f}$):

$$\overline{p_f} = \Pr(R > S) = 1 - p_f$$

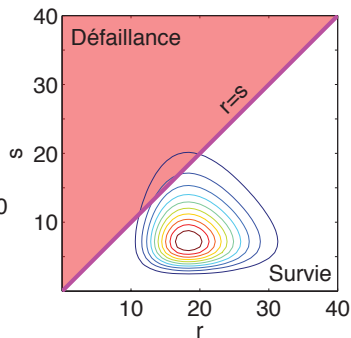
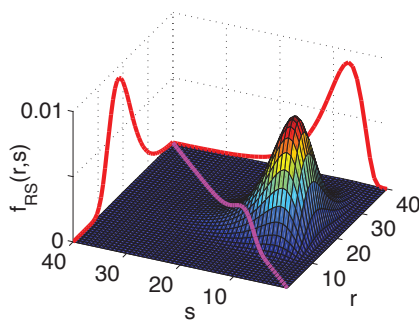
Exemple #2.1a ⚠

Soit R et S deux variable aléatoires log normales où:

$$R \begin{cases} \mu_R = 20 \\ \sigma_R = 5 \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 10 \\ \sigma_S = 5 \end{cases}, R \perp S$$



Exemple #2.1a - Espace multidimensionnel

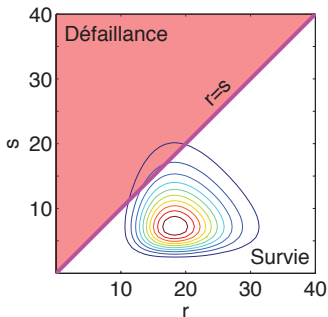


$$p_f = \iint_{\{r \leq s\}} f_{R,S}(r,s) dr ds \approx \underbrace{0.073}_{\triangle} \ll \underbrace{0.26}_{\triangle}$$

Méthode d'intégration #1 – Introduction

$$p_f = \iint_{\{r \leq s\}} f_{R,S}(r, s) dr ds \quad \triangle \text{ Il est difficile d'intégrer en 2D...}$$

$$\text{Méthode \#1: } \iint \rightarrow \int$$

Calcul de p_f 

$$f_{R,S}(r, s) = f_{R|S}(r|s)f_S(s)$$

$$\begin{aligned} p_f &= \int_0^\infty \underbrace{\int_0^s f_{R|S}(r|s) dr}_{F_{R|S}(s|s)} f_S(s) ds \\ &= \int_0^\infty \underbrace{F_{R|S}(s|s)}_{\Pr(R \leq s|s)} f_S(s) ds \end{aligned}$$

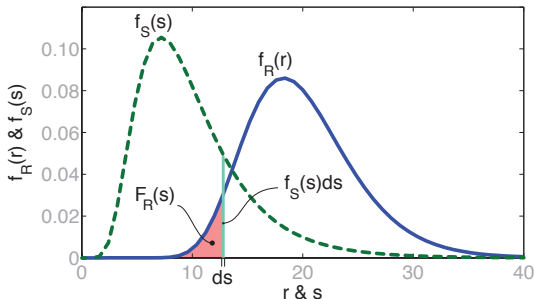
$$f_{R,S}(r, s) = f_{S|R}(s|r)f_R(r)$$

$$\begin{aligned} p_f &= \int_0^\infty \int_r^\infty f_{S|R}(s|r)f_R(r) ds dr \\ &= \int_0^\infty \underbrace{[1 - F_{S|R}(r|r)]}_{\Pr(S \leq r|r)} f_R(r) dr \end{aligned}$$

Calcul de p_f - $R \perp\!\!\!\perp S$

Si $R \perp\!\!\!\perp S$, $f_{R|S}(r|s) = f_R(r)$ et $f_{S|R}(s|r) = f_S(s)$

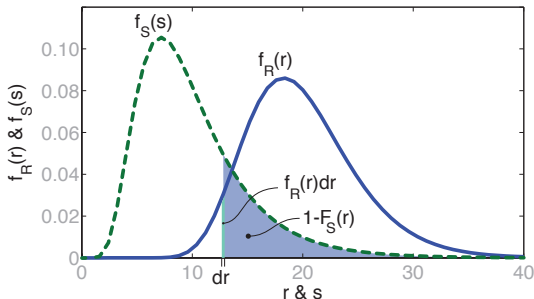
$$p_f = \int_0^{\infty} \underbrace{F_R(s)}_{\Pr(R \leq s)} f_S(s) ds = \int_0^{\infty} [1 - \underbrace{F_S(r)}_{\Pr(S \leq r)}] f_R(r) dr$$



Calcul de p_f - $R \perp\!\!\!\perp S$

Si $R \perp\!\!\!\perp S$, $f_{R|S}(r|s) = f_R(r)$ et $f_{S|R}(s|r) = f_S(s)$

$$p_f = \int_0^{\infty} \underbrace{F_R(s)}_{\Pr(R \leq s)} f_S(s) ds = \int_0^{\infty} [1 - \underbrace{F_S(r)}_{\Pr(S \leq r)}] f_R(r) dr$$



Calcul de $p_f - Z = R - S$

La **marge de sécurité** (Z) est la distance entre R et S

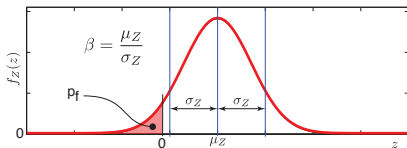
$$Z = R - S$$

où $\{Z \leq 0\}$ denote la **défaillance**. Donc,

$$p_f = \Pr(Z \leq 0) \equiv \Pr\left(U \leq -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta)$$

Comme Z est une fonction linéaire,

$$\mathcal{N}(z; \mu_Z, \sigma_Z^2) \begin{cases} \mu_Z = \mu_R - \mu_S \\ \sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S \end{cases}$$



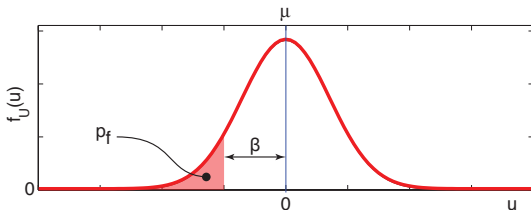
Indice de fiabilité

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S}}$$

$Z = R - S$, transformation $Z \rightarrow U$

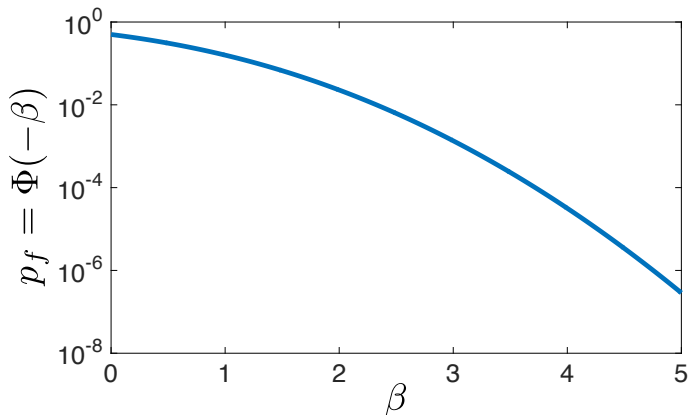
$$p_f = \Pr(Z \leq 0) = F_Z(0) \approx \Pr\left(U \leq -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = F_U(-\beta) \equiv \Phi(-\beta)$$

- ▶ $U \sim \phi(u)$, $u = \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z}$ est une V.A. normale centrée réduite.
- ▶ $\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$ est **l'indice de fiabilité**



△ p_f est calculé sans erreur si
 $f_{RS}(r, s) \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma})$

Relation $p_f - \beta$

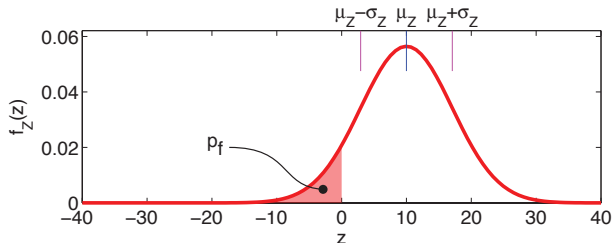
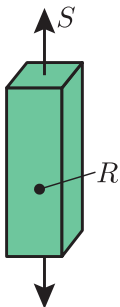


Exemple #2.1b [📐]

Soit R et S deux variable aléatoires log normales où:

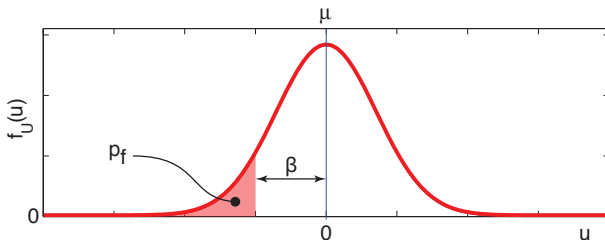
$$R \begin{cases} \mu_R = 20 \\ \sigma_R = 5 \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 10 \\ \sigma_S = 5 \end{cases}, R \perp S, Z \begin{cases} \mu_Z \approx 10 \\ \sigma_Z \approx 7 \end{cases}$$

Si on accepte la simplification où $R - S = Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$



Exemple #2.1b [📐]

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{10}{7} = 1.41$$



$$\underbrace{p_f = 0.073}_{\text{valeur exacte}} \approx \Phi(-\beta) = 0.079$$

Calcul de $p_f - Z = R/S$

Le *facteur de sécurité* (Z) est le ratio entre R et S

$$Z = \frac{R}{S}, \text{ ou } Z = \ln \left(\frac{R}{S} \right) = \ln R - \ln S$$

note: $\{R \leq S\} \equiv \{\ln R \leq \ln S\}$. Comme $\ln R$ et $\ln S$ suivent des distributions log normales

$$\mu_Z = \mu_{\ln R} - \mu_{\ln S} = 0.77$$

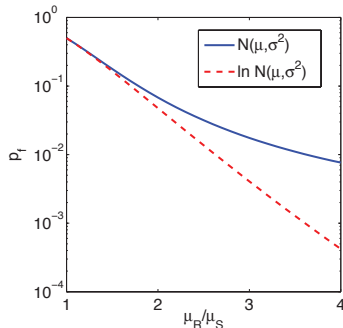
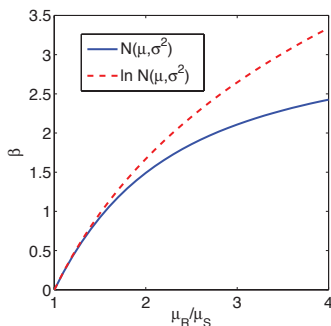
$$\sigma_Z^2 = \sigma_{\ln R}^2 + \sigma_{\ln S}^2 - 2 \underbrace{\rho_{\ln R \ln S}}_{=0} \sigma_{\ln R} \sigma_{\ln S} = 0.53^2$$

$$\underbrace{p_f = 0.073}_{\text{valeur exacte}} = F_U \left(-\frac{0.77}{0.53} \right) = 0.073 \triangle$$

Choix de $f_{RS}(r, s)$

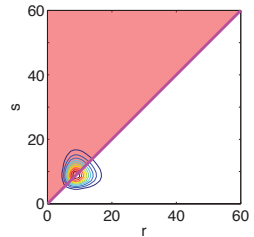
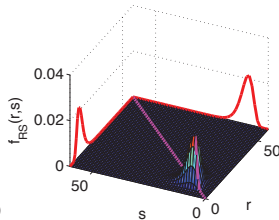
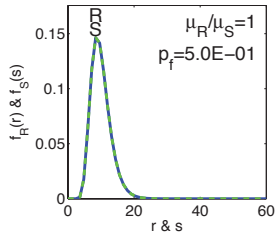
Quelle est l'influence du choix de $f_{RS}(r, s)$ sur p_f ?

Pour $\mu_S = 10$, $\delta_R = \delta_S = 0.3$, et $R \perp\!\!\!\perp S$



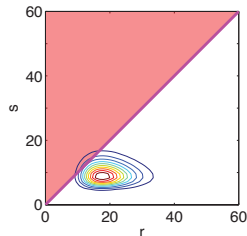
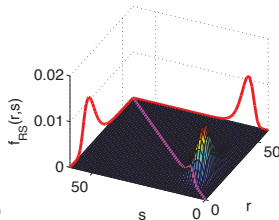
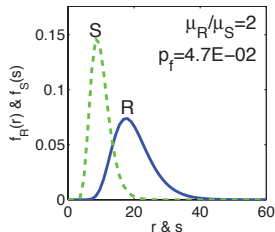
Qu'elle est la cause de cet écart?

Choix de $f_{RS}(r, s)$ (cont.) [📊]



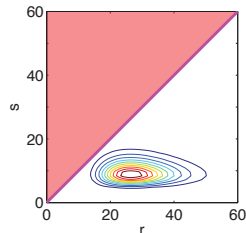
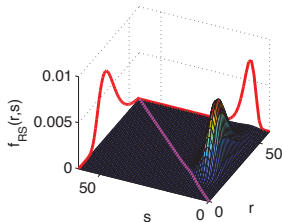
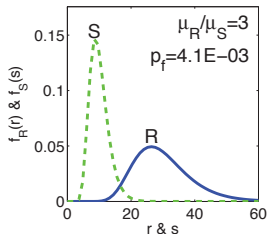
Pour de faibles valeurs de p_f , **le contenu de probabilité se situe dans la queue de la distribution**, laquelle est mal décrite par les mesures de positions (μ) et de dispersions (σ).

Choix de $f_{RS}(r, s)$ (cont.) [📊]



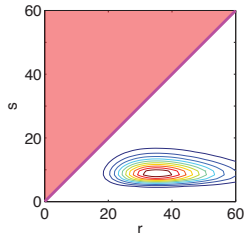
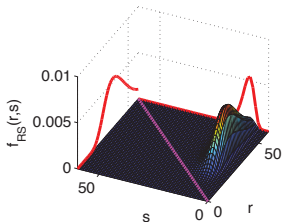
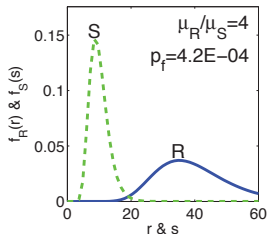
Pour de faibles valeurs de p_f , **le contenu de probabilité se situe dans la queue de la distribution**, laquelle est mal décrite par les mesures de positions (μ) et de dispersions (σ).

Choix de $f_{RS}(r, s)$ (cont.) [📊]



Pour de faibles valeurs de p_f , **le contenu de probabilité se situe dans la queue de la distribution**, laquelle est mal décrite par les mesures de positions (μ) et de dispersions (σ).

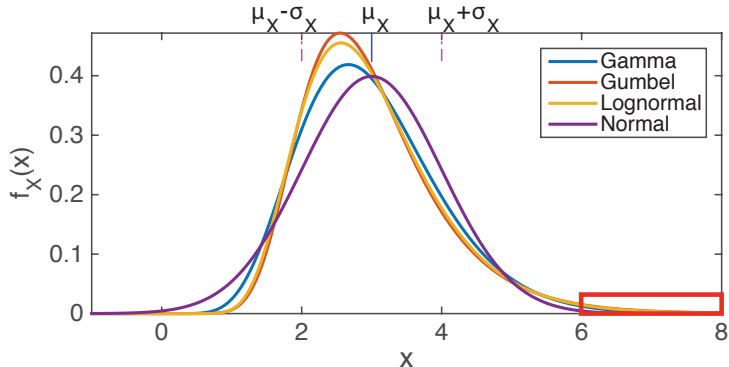
Choix de $f_{RS}(r, s)$ (cont.) [📊]



Pour de faibles valeurs de p_f , **le contenu de probabilité se situe dans la queue de la distribution**, laquelle est mal décrite par les mesures de positions (μ) et de dispersions (σ).

Comparaison des densités de probabilité [📊]

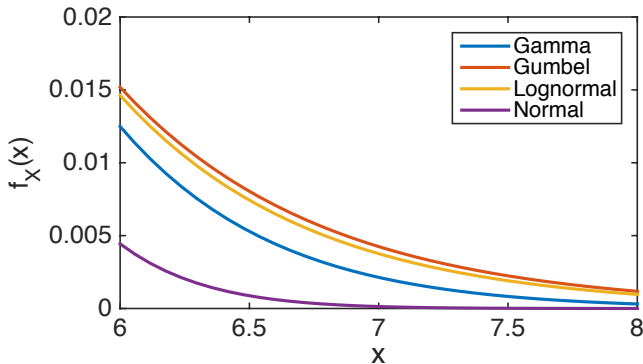
Pour $\mu_X = 3$ et $\sigma_X = 1$



Quelle est la différence entre ces distributions?
Pourquoi est-ce important?

Comparaison des densités de probabilité [📊]

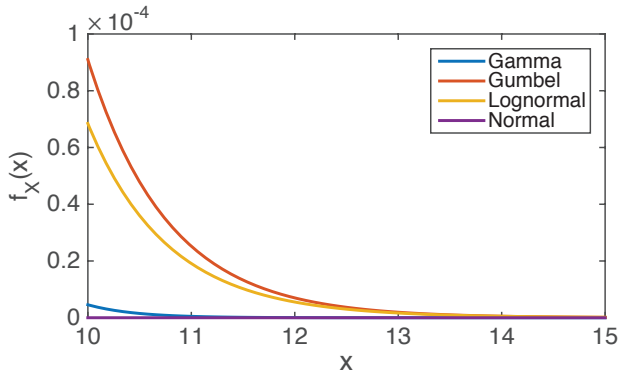
Pour $\mu_X = 3$ et $\sigma_X = 1$



Quelle est la différence entre ces distributions?
Pourquoi est-ce important?

Comparaison des densités de probabilité [📊]

Pour $\mu_X = 3$ et $\sigma_X = 1$



Quelle est la différence entre ces distributions?
Pourquoi est-ce important?



Plan de la section

Cas général: F.É.L.

4.1 Définition

4.2 Exemples

4.3 Fiabilité des systèmes

Probabilité de défaillance - Fonction d'état limite

Soit $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ un ensemble de **variables aléatoires de base** (directement observables)

et soit $\{R(\mathbf{X}), S(\mathbf{X}), A(\mathbf{X}), \dots\}$ un ensemble de variables étant fonction de $\mathbf{X}$ et non-directement observables

$g(\mathbf{X})$ est une **fonction d'état limite** (ex: $g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X})$)

$g(\mathbf{X}) = 0$ est la **surface d'état limite**

$\Omega = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ correspond au **domaine de défaillance**

Probabilité de défaillance (ou de rupture, p_f):

$$p_f = \Pr(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

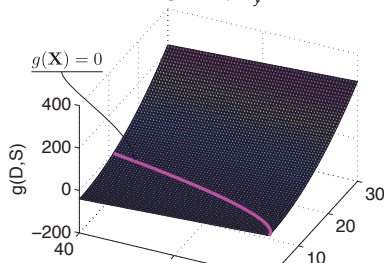
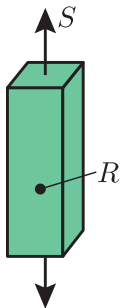
Exemple #2.2 [🚀]

Soit D et S deux variable aléatoires log normales où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases}, f_y = 300 \text{ MPa}, D \perp S$$

$$\mathbf{X} = \{D, S\}, R(D) = D^2 f_y, g(\mathbf{X}) = R(D) - S$$

$$p_f = \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\infty} \int_{d^2 f_y}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) ds dd \approx 0.08$$



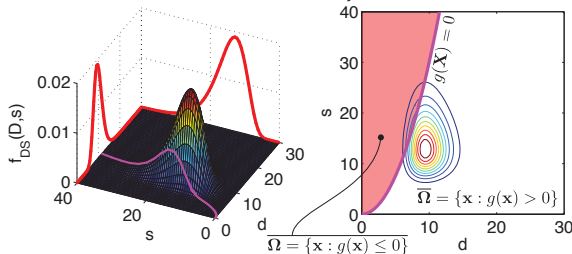
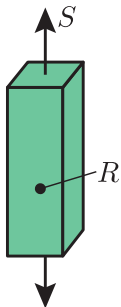
Exemple #2.2 [🔥]

Soit D et S deux variable aléatoires log normales où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases}, f_y = 300 \text{ MPa}, D \perp S$$

$$\mathbf{X} = \{D, S\}, R(D) = D^2 f_y, g(\mathbf{X}) = R(D) - S$$

$$p_f = \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\infty} \int_{d^2 f_y}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) ds dd \approx 0.08$$



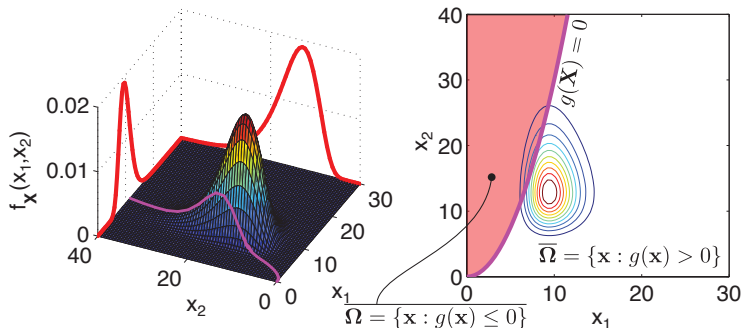
Récapitulatif – Fonction d'état limite

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$: ensemble de variables aléatoires

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: densité de probabilité conjointe

$g(\mathbf{X})$: fonction d'état limite

$\Omega = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{X}) \leq 0\}$: domaine de défaillance



Exemples - $g(\mathbf{X})$

- Flambement élastique

$$g(E, I, k, L, P) = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} - P$$

- Déplacement résiduel relatif inter-étage

$$g_i(\mathbf{X}) = \Delta_i(\mathbf{x}) - \delta_i(\mathbf{x})$$

pour 1 étage: $g(\mathbf{X}) = g_1(\mathbf{X})$

pour m étages: $g(\mathbf{X}) = \min[g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X})]$

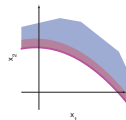
- Plasticité & Von Mises

$$g(\mathbf{X}) = \sigma_y^2(\mathbf{x}) - (\sigma_1^2(\mathbf{x}) + \sigma_2^2(\mathbf{x}) - \sigma_1(\mathbf{x})\sigma_2(\mathbf{x}))$$

Classes de problèmes

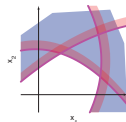
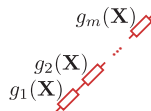
Fiabilité d'une composante:

$g_1(\mathbf{X})$ est continue et dérivable



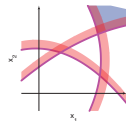
Fiabilité d'un système en série

$$g(\mathbf{X}) = \min[g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X})]$$



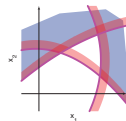
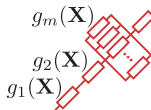
Fiabilité d'un système en parallèle

$$g(\mathbf{X}) = \max[g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X})]$$



Fiabilité d'un système

$$g(\mathbf{X}) = \min \left\{ \max_{i \in c_1} [g_i(\mathbf{X})], \dots, \max_{i \in c_k} [g_i(\mathbf{X})] \right\}$$



Défis de calculs

1- Assemblage de multiples composantes

Chaque classe de problème (i.e. série, parallèle, ou système) peut être décomposée en une multitudes de problèmes de fiabilité à composante unique.

À voir: Définition des *ensembles de coupures* et *ensembles liens*

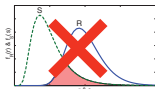
2- Integration multiple ($N > 2$)

Que fait-on lorsque $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ et $N > 2$?

- ▶ Il n'est plus possible de tracer $f_X(\mathbf{x})$
- ▶ Intégrer analytiquement en $N > 2$ dimensions est difficile

À voir: *Approximations analytiques, i.e. FOSM, FORM, SORM* et *intégration numérique, i.e. Monte Carlo*

Résumé



Cas spécial R, S :

R : Résistance (Capacité)
 S : Sollicitation (Demande)
 $\{R \leq S\}$: Défaillance (Rupture)

$$p_f = \Pr(R \leq S)$$

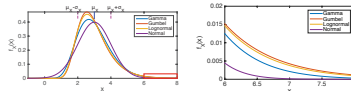
Marge de sécurité: $Z = R - S$, $Z = R/S$

Indice de fiabilité:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S}}$$

$$p_f = \Pr(Z \leq 0) = F_U(-\beta) \equiv \Phi(-\beta)$$

Influence de $f_X(x)$:



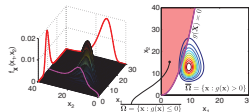
Fonction d'état limite:

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$: V.A. de base

$g(\mathbf{X})$: fonction d'état limite

$g(\mathbf{X}) = 0$: surface d'état limite

$\Omega = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$: domaine de défaillance



$$p_f = \Pr(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

<i>Théorie probabilité</i>	{	0	Révision algèbre & probabilités	
		1	Lois de probabilités	
		3	PDF multivariés	
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	{		Introduction	
		2	Formulation fiabilité composantes	$g_1(X)$ 
		9	Formulation fiabilité systèmes	
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	{	4	Monte Carlo	 
		12	Échantillonnage par importance	  
<i>Estimation – p_f analytique</i>	{	5	FOSM	  
		6	FORM	  
		8	SORM	  
<i>Utilisation des résultats</i> 	{	7	Analyse de sensibilité	
		10	Incertitudes aléatoires & épistémiques	
		11	Données empiriques	
		13	Prise de décision	
		14	Métamodèles & modèles empiriques	