Module #1
Lois de probabilité

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal

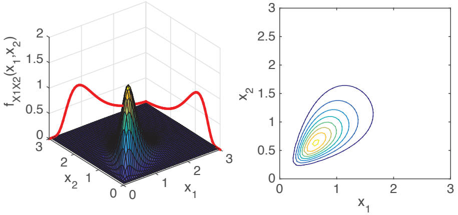
Section 4 - A. Der Kiureghian, (2005), *CE193 - Probabilistic Methods for Engineering Risk Analysis*. Department of Civil and Environmental Engineering, UC Berkeley

Pourquoi?

Les **lois de probabilité** servent à décrire la densité de probabilité de **phénomènes physiques**.

Nous allons voir certaines d'entre elles:

1. Loi normale
2. Loi lognormale
3. Loi Gamma
4. Loi Gumbel
5. Loi Beta



Plan du module #1

Loi normale

Loi normale centrée réduite

Loi lognormale

Loi Gamma

Loi Gumbel

Loi beta

Organisation de la matière

Théorie probabilité	0	Révision algèbre & probabilités
	1	Lois de probabilités
	3	PDF multivariés
Fiabilité des structures & systèmes		Introduction
	2	Formulation fiabilité composantes $g_1(\mathbf{X})$
	9	Formulation fiabilité systèmes
Estimation – p_f échantillonnage	4	Monte Carlo
	12	Échantillonnage par importance
Estimation – p_f analytique	5	FOSM
	6	FORM
	8	SORM
Utilisation des résultats	7	Analyse de sensibilité
	10	Incertitudes aléatoires & épistémiques
	11	Données empiriques
	13	Prise de décision
	14	Métamodèles & modèles empiriques

Plan de la section

Loi normale univariée, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ [.m]

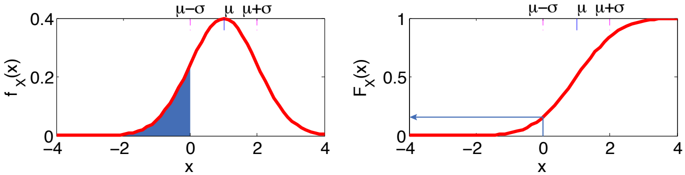
Densité de probabilité (PDF) pour une variable aléatoire X : $x \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) \begin{cases} \mu & : \text{moyenne (i.e, C.G.)} \\ \sigma^2 & : \text{variance (i.e, Inertie)} \end{cases}$$

Densité de probabilité cumulative (CDF)

$$F_X(0) = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx = 0.16$$

$\mu = 1$
$\sigma = 1$

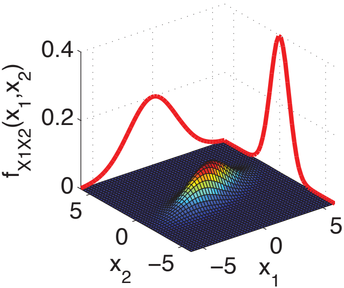


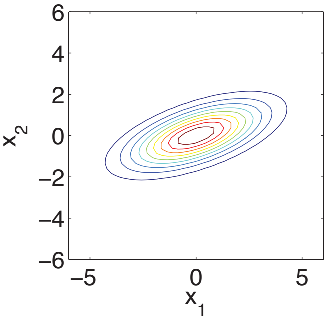
Loi normale bi-variée [.m]

Densité de probabilité (PDF) pour 2 variables aléatoires X_1, X_2

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)\left(\frac{x_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)\right]\right\}$$

$$\begin{aligned}\mu_{X_1} &= 0\\ \sigma_{X_1} &= 2\\ \mu_{X_2} &= 0\\ \sigma_{X_2} &= 1\\ \rho &= 0.6\end{aligned}$$



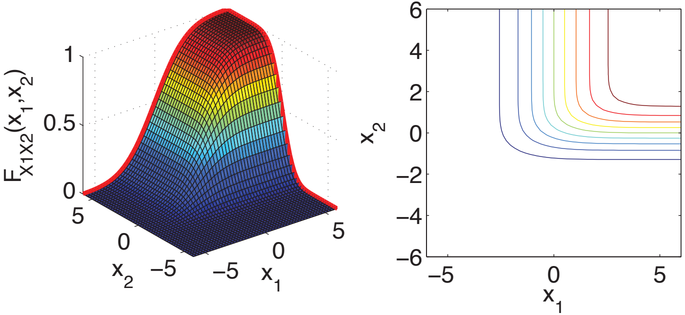


Loi normale bi-variée [ ]

Densité de probabilité cumulative (CDF) pour 2 variables aléatoires X_1, X_2

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\partial x \partial y$$

$\mu_{X_1} = 0$
$\sigma_{X_1} = 2$
$\mu_{X_2} = 0$
$\sigma_{X_2} = 1$
$\rho = 0.6$



Loi normale multivariée, $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$

Densité de probabilité (PDF) pour n variables aléatoires $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^\intercal$, où $\mathbf{M_X} = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n]^\intercal$ est un vecteur contenant les moyennes et $\mathbf{\Sigma_{XX}}$ est la matrice de covariance.

$$\mathbf{\Sigma_{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{X_1} & \rho_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \cdots & \rho_{1n}\sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ & \sigma^2_{X_2} & \cdots & \rho_{2n}\sigma_{X_2}\sigma_{X_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym.} & & & \sigma^2_{X_n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\boxed{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{\Sigma_{XX}})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{M_X})^\intercal \mathbf{\Sigma_{XX}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{M_X})\right]}$$

Matrice de variance, corrélation et covariance

- $\mathbf{D_{XX}}$: Matrice des écarts-types
- $\mathbf{R_{XX}}$: Matrice de corrélation
- $\mathbf{\Sigma_{XX}}$: Matrice de covariance

$$\mathbf{D_{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \sigma_{X_2} & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ \text{sym.} & & & \sigma_{X_n} \end{bmatrix}, \mathbf{R_{XX}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ & & \vdots & \rho_{n-1n} \\ \text{sym.} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma_{XX}} = \mathbf{D_{XX}R_{XX}D_{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{X_1} & \rho_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \cdots & \rho_{1n}\sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ & \sigma^2_{X_2} & \cdots & \rho_{2n}\sigma_{X_2}\sigma_{X_n} \\ & & \vdots & \vdots \\ \text{sym.} & & & \sigma^2_{X_n} \end{bmatrix}$$

Loi multinormale - propriétés

1. Complètement définie par $\mathbf{M_X}$ et $\mathbf{\Sigma_{XX}}$
2. Les distributions marginales sont normales
3. L'absence de corrélation implique l'indépendance
4. La distribution asymptotique provenant de la somme de phénomènes aléatoires (iid) est normale (**Théorème limite central**)

Soit, $X_i,\ i = 1, \cdots, n$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid)

$$Y = (X_1 + \cdots + X_n) \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2), \text{ pour } n \to \infty$$

Loi multinormale - propriétés (cont.)

5. Les fonctions linéaires de variables normales sont normales

$$\text{Soit, } \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}_X, \mathbf{\Sigma}_{XX}) \text{ et } \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{M}_X + \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}_{XX}\mathbf{A}^\intercal)$$

6. Les distribution conditionnelles sont normales

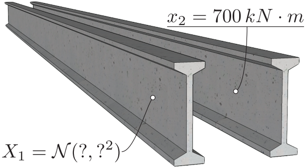
$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{array} \right\}, \ \mathbf{M} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{array} \right\}, \ \mathbf{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{array} \right]$$

$$f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1 | \underbrace{\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2}_{\text{observations}}) = \frac{f_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2)} = \mathcal{N}(\mathbf{M}_{1|2}, \mathbf{\Sigma}_{11|2})$$

$$\mathbf{M}_{1|2} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{M}_2), \quad \mathbf{\Sigma}_{11|2} = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$$

$$\text{2D: } \mu_{1|2} = \mu_1 + \rho\sigma_1\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}, \quad \sigma_{1|2} = \sigma_1\sqrt{1 - \rho^2}$$

Exemple – distribution conditionnelle multinormale



La connaissance à priori de la résistance réelle (X_1, X_2) de deux poutres voisines est

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \mathcal{N}(500, 150^2) \quad [kN \cdot m] \\ X_2 &\sim \mathcal{N}(500, 150^2) \quad [kN \cdot m] \end{aligned}$$

Sachant que la résistance de deux poutres est corrélé: $\rho_{12} = 0.8$,
quelle est la résistance X_1 si on observe que $x_2 = 700\,kN \cdot m$?

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \mathcal{N}(\mu_{1|2}, \sigma^2_{1|2}) = \mathcal{N}(660, 90^2)$$

[Radio-Canada]

Exemple – distribution conditionnelle multinormale (cont.)

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\mathcal{N}(\mathbf{M_X}_\mathbf{X},\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{XX})\begin{cases}\mathbf{M_X}=\begin{bmatrix}500\\500\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{XX}=\begin{bmatrix}150^2 & 0.8\cdot150^2\\ 0.8\cdot150^2 & 150^2\end{bmatrix}\end{cases}$$

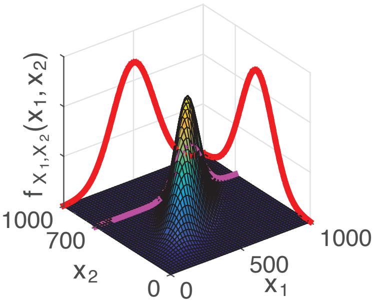
$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)=\frac{f_{X_1X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=\mathcal{N}(\mu_{1|2},\sigma^2_{1|2})\begin{cases}\mu_{1|2}=\mu_1+\rho\sigma_1\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\\ \sigma_{1|2}=\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\end{cases}$$

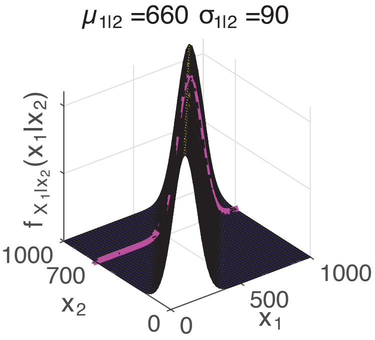
$$\mu_{1|2}=500+0.8\times150\frac{\overbrace{700}^{\text{observation}}-500}{150}=660$$

$$\sigma_{1|2}=150\sqrt{1-0.8^2}=90$$

Exemple – distribution conditionnelle multinormale [.m]

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \mathcal{N}(\mu_{1|2},\sigma^2_{1|2}) \begin{cases} \mu_{1|2} = \mu_1 + \rho\sigma_1\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \\ \sigma_{1|2} = \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$





Addition de variables normales

Soit deux V.A. normales $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\;\; Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\begin{aligned} Z &= X + Y \\ &\sim \mathcal{N}(\underbrace{\mu_X + \mu_Y}_{\mu_Z}, \underbrace{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}_{\sigma_Z^2}) \end{aligned}$$

Si $\rho_{XY} \neq 0$

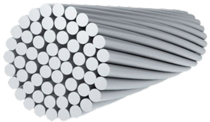
$$\begin{aligned} Z &= X + Y \\ &\sim \mathcal{N}(\underbrace{\mu_X + \mu_Y}_{\mu_Z}, \underbrace{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y}_{\sigma_Z^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \textstyle\sum_{i=1}^n X_i \\ &\sim \mathcal{N}\left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mu_{X_i}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right) \end{aligned}$$

$(\text{Note: } \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = [\boldsymbol{\Sigma}]_{ij})$

Exemple – addition de variables normales

Soit un câble composé de 50 fils d'acier (rupture ductile) ayant chacun une capacité $X_i \sim \mathcal{N}(10, 3^2)\,kN$.



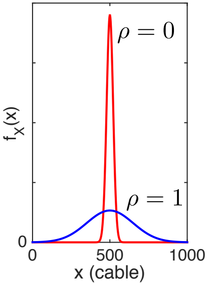
Quelle est $X_{\text{câble}} = \sum_{i=1}^{50} X_i$?

Si on fait l'hypothèse que $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$

$$X_{\text{câble}} \sim \mathcal{N}(50 \times 10, \underbrace{50 \times 3^2}_{\sigma_{X_{\text{câble}}}=3\sqrt{50}\approx 21\,kN})$$

Si on fait l'hypothèse que $\rho_{X_i,X_j} = 1$

$$X_{\text{câble}} \sim \mathcal{N}(50 \times 10, \underbrace{50^2 \times 3^2}_{\sigma_{X_{\text{câble}}}=3\times 50=150\,kN})$$



[steelwirerope.com, Der Kiureghian (2005)]

Python – $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ []

```python
#Code snippet - Python normal R.V.
from scipy.stats import norm
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

m_X = 0                      # Mean of X
s_X = 1                      # Standard deviation of X
x = np.arange(-3, 3, 0.01) # Values of x to be evaluated
f_x = norm.pdf(x,m_X,s_X)   # PDF of X
F_x = norm.cdf(x,m_X,s_X)   # CDF of X
plt.plot(x, f_x)            # Plot the PDF of X
plt.show()
```

Python – $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$ []

```python
#Code snippet - Python multivariate Normal R.V.
from scipy.stats import multivariate_normal

m_X1 = 0              # Mean X1
m_X2 = 0              # Mean X2
s_X1 = 2              # Standard deviation X1
s_X2 = 1              # Standard deviation X2
rho = 0.6             # Correlation coefficient
x1x2 = [-2,2]         # Values of x to be evaluated

M_X = [m_X1,m_X2]     # Mean vector
S_XX = [[s_X1**2, rho*s_X1*s_X2],[rho*s_X1*s_X2, s_X2**2]]
f_x1x2 = multivariate_normal.pdf(x1x2,M_X,S_XX) #Joint PDF
F_x1x2 = multivariate_normal.cdf(x1x2,M_X,S_XX) #Joint CDF
```

Python – $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$ [ ]

```
# Code snippet - Surface and contour plots
from scipy.stats import multivariate_normal
from matplotlib import pyplot as plt, cm
import numpy as np
m_X1, m_X2 = 0, 0 # Mean X1/ Mean X2
s_X1, s_X2 = 2, 1 # Standard deviation X1 / Standard deviation X2
rho = 0.6          # Correlation coefficient
M_X = [m_X1, m_X2]
S_XX = [[s_X1**2, rho*s_X1*s_X2],[rho*s_X1*s_X2, s_X2**2]]
ndiv, min_x, max_x = 50, -5, 5 # Number of subdivision for plotting / min / max
x1 = np.linspace(min_x,max_x,ndiv)
x2 = np.linspace(min_x,max_x,ndiv)
x1M,x2M = np.meshgrid(x1,x2)         #Grid of x1,x2 to be evaluated
x1MR = np.reshape(x1M,(ndiv**2,1))   #Reshape grids in columns vectors
x2MR = np.reshape(x2M,(ndiv**2,1))
xMR=np.column_stack((x1MR,x2MR))     #Concatenate x1,x2 vectors
f_x1x2MR=multivariate_normal.pdf(xMR,M_X,S_XX)       #Evaluate each grid point
f_x1x2=np.reshape(f_x1x2MR,(ndiv,ndiv))               #Reshape: vector to grid
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(2, 1, 1, projection='3d')  #First of 2 plots on one fig.
ax.plot_surface(x1M,x2M,f_x1x2,rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm)
ax.set(xlabel='$x_1$', ylabel='$x_2$', zlabel = '$f_{X1X2}(x_1,x_2)$')
ax = fig.add_subplot(2, 1, 2)
ax.contour(x1, x2, f_x1x2)                      #2D contour plot
ax.set_xlim([min_x,max_x])
ax.set_ylim([min_x,max_x])
ax.set(xlabel='$x_1$', ylabel='$x_2$')
plt.show()
```

Plan de la section

Loi normale centrée réduite, $U \sim \mathcal{N}(0,1)$

PDF: Loi normale centrée réduite

$$\phi(u) = \mathcal{N}(u;0,1)$$

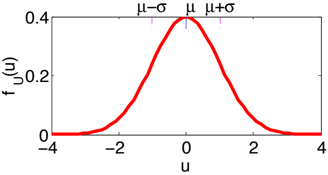
$$\mathcal{N}(x;\mu,\sigma^2) \leftrightarrow \mathcal{N}(u;0,1)$$

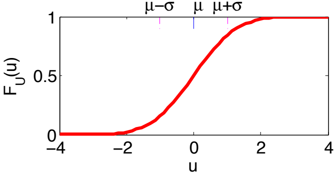
$$\boxed{U = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

CDF: Loi normale centrée réduite

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(u)du$$

$$\mu \triangleq 0$$
$$\sigma \triangleq 1$$





Loi normale $\leftrightarrow$ normale centrée réduite

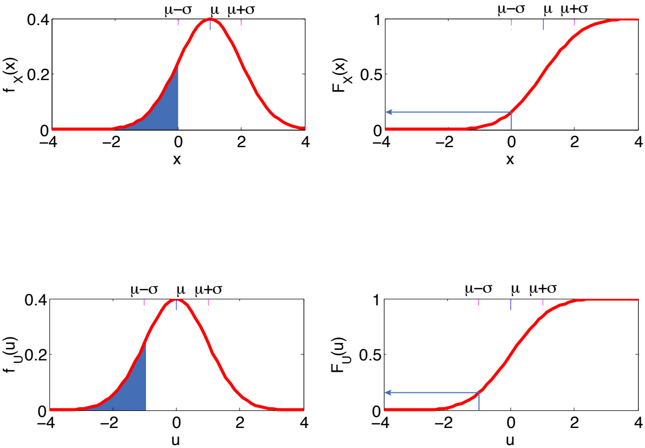
$X \sim \mathcal{N}(1,1)$

$F_X(0) = 0.16$

$$\boxed{u = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

$U \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Phi(-1) = 0.16$



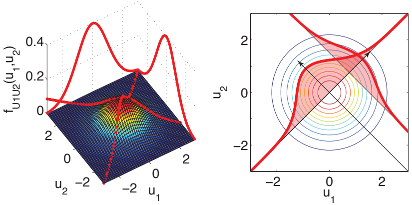
Loi normale centrée réduite, $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

PDF: Variables normales centrées réduites indépendantes

$$\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) = \phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{I}) = \phi_n(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{n} \phi(u_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2\right)$$

$$\|\mathbf{u}\| \triangleq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

- Les contours de $\phi_n(\mathbf{u})$ sont sphériques et centrés à l'origine
- La probabilité dans toutes les directions radiales diminue exponentiellement avec un incrément de $\|\mathbf{u}\|^2$



Loi normale centrée réduite, $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ [.m]

PDF: Variables normales centrées réduites corrélées

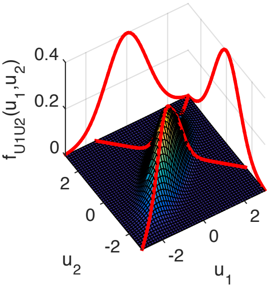
$$\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) = \phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{R})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^\intercal \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}\right)$$

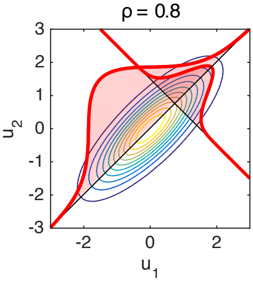
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= [u_1, u_2, \cdots, u_n]^\intercal \\
\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ & & \vdots\vdots\vdots & \rho_{n-1n} \\ \text{sym.} & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}
\end{aligned}$$

Loi normale centrée réduite, $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ [.m]

PDF: Variables normales centrées réduites corrélées

$$\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) = \phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{R})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\intercal}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}\right)$$





Loi normale centrée réduite - transformation $u \leftrightarrow x$

Espace réel (normal) $\leftrightarrow$ espace normal centré réduit

Une variable:

$$F_X(x) = \Phi(u), \quad u = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

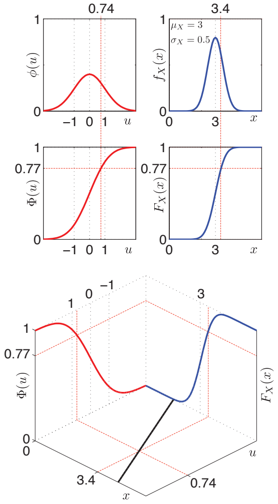
Deux variables:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \Phi_2(u_1, u_2, \rho)$$

n **variables**:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \Phi_n(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_{\mathbf{X}}), \quad \mathbf{L} = \text{chol}(\mathbf{R})$$

Transformation dans l'espace NCR [.m]



Plan de la section

Loi lognormale

Loi lognormale univariée

La variable aléatoire X **est lognormale si** $\ln X$ **est normale**.

La loi lognormale univariée est définie à partir de la valeur moyenne ($\mu_{\ln X} = \lambda$) et de la variance ($\sigma^2_{\ln X} = \zeta^2$) dans l'espace lognormal ($\ln X$).

- μ_X: moyenne de X
- λ: moyenne de $\ln X$ ($= \mu_{\ln X}$)

$$\lambda = \mu_{\ln X} = \ln \mu_X - \frac{\zeta^2}{2}$$

- σ^2_X: variance de X
- ζ^2: variance de $\ln X$ ($= \sigma^2_{\ln X}$)

$$\zeta = \sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln(1 + \delta^2_X)}$$

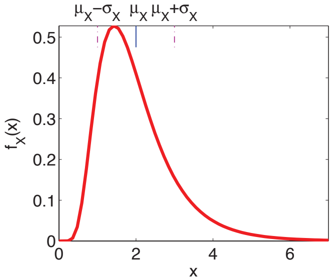
$$(\zeta \cong \delta_X \text{ for } \delta_X < 0.3)$$

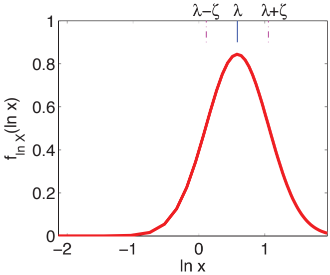
Loi lognormale univariée, $X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda, \zeta)$ [.m]

Densité de probabilité (PDF) pour une V.A. X : $x \in \mathbb{R}^+$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\zeta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right], \quad x > 0$$

$\mu_X = 2$
$\sigma_X = 1$
$\lambda = 0.58$
$\zeta = 0.47$





Formulation – loi lognormale, $X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda, \zeta)$

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\zeta} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right], \quad x > 0$$

Comment obtient-on l'équation du PDF lognormal?

Formulation – loi lognormale, $X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda, \zeta)$

$$\left.\begin{array}{rcl} X & : & x \in \mathbb{R}^+ \\ X' = \ln X & : & x' \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{f_{X'}(x')}^{\mathcal{N}(x';\lambda,\zeta^2)}\, dx' & = & f_X(x)dx \\ f_{X'}(x')\left|\frac{dx'}{dx}\right| & = & f_X(x) \end{array}$$

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{rcl} f_X(x) & = & \frac{1}{x}\cdot\mathcal{N}(\ln x; \lambda, \zeta^2) \\ & = & \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right], \quad x > 0 \end{array}$$

Loi lognormale multivariée

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont conjointement lognormales si $\ln X_1, \ln X_2, \cdots, \ln X_n$ sont conjointement normales.

La loi lognormale multivariée est définie à partir des valeurs moyennes ($\mu_{\ln X_i} = \lambda$), des variances ($\sigma^2_{\ln X_i} = \zeta^2$) et des coefficients de correlations ($\rho_{\ln X_i \ln X_j}$) de $\ln X_i,\ i = 1, \cdots, n$ (**dans l'espace lognormal**).

$$\rho_{\ln X_i \ln X_j} = \frac{1}{\zeta_i \zeta_j} \ln(1+\rho_{X_i X_j}\delta_{X_i}\delta_{X_j}), \quad (\rho_{\ln X_i \ln X_j} \cong \rho_{X_i X_j} \text{ pour } \delta_{X_i} \ll 0.3)$$

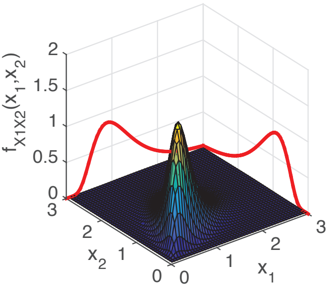
Loi lognormale bivariée [.m]

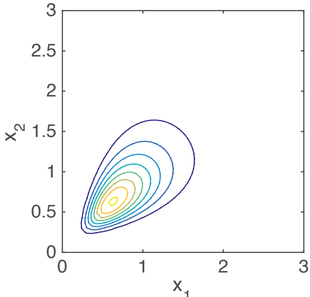
Densité de probabilité (PDF) pour 2 variables aléatoires X_1, X_2

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1 x_2 \sqrt{2\pi}\zeta_{X_1}\zeta_{X_2}\sqrt{1-\rho_{\ln}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\ln}^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1-\lambda_{X_1}}{\zeta_{X_1}}\right)^2 + \left(\frac{\ln x_2-\lambda_{X_2}}{\zeta_{X_2}}\right)^2 - 2\rho_{\ln}\left(\frac{\ln x_1-\lambda_{X_1}}{\zeta_{X_1}}\right)\left(\frac{\ln x_2-\lambda_{X_2}}{\zeta_{X_2}}\right)^2\right]\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} x_1, x_2 > 0 \\ \rho_{\ln} = \rho_{\ln X_1 \ln X_2} \end{array}\right.$$

$\mu_{X_i} = 1$
$\sigma_{X_i} = 0.5$
$\rho_{X_1X_2} = 0.6$

$\lambda_i = -0.11$
$\zeta_i = 0.47$
$\rho_{ln} = 0.62$





Loi lognormale multivariée - propriétés

1. Complètement définie par $\mathbf{M_X}$ et $\mathbf{\Sigma_{XX}}$
2. Les distribution marginales sont lognormales
3. Les distribution conditionnelles sont lognormales
4. L'absence de corrélation implique l'indépendance
5. La multiplication de variables conjointement lognormales sont conjointement lognormales

   $X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda_X, \zeta_X^2), \;\; Y \sim \ln\mathcal{N}(\lambda_Y, \zeta_Y^2)$

$$\left.\begin{aligned} Z &= X \cdot Y \\ &\sim \ln\mathcal{N}(\lambda_Z, \zeta_Z^2) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \lambda_Z &= \lambda_X^2 + \lambda_Y^2 \\ \zeta_Z^2 &= \zeta_X^2 + \zeta_Y^2 \end{aligned}$$

Loi lognormale multivariée - propriétés (cont.)

6. La distribution asymptotique provenant de la multiplication de phénomènes aléatoires (iid) est lognormale (Théorème limite central)

   Soit, $X_i, \; i = 1, \cdots, n$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid)

$$\begin{aligned} Y &= X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \\ &\sim \ln \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2), \text{ pour } n \to \infty \end{aligned}$$

Python – $X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda, \zeta)$ [ ]

```
# Code snippet - Matlab lognormal R.V.
from scipy.stats import lognorm, norm
from sympy import Symbol
import sympy as sp
import numpy as np

# Parameters
m_X = 1                                      # Mean of X
s_X = 1                                      # Standard deviation of X
s_lnX = np.sqrt(np.log(1+(s_X/m_X)**2)) # Std log(X)
m_lnX = np.log(m_X)-0.5*s_lnX**2;            # Mean log(X)
x = np.arange(-3, 3, 0.01)                   # Values of x to be evaluated

# Numerical evaluation
f_x=lognorm.pdf(x,m_lnX ,s_lnX)              # PDF of X
f_x=norm.pdf(np.log(x),m_lnX ,s_lnX)/x       # PDF of X

# Analytic formulation
x_ = Symbol('x_', positive=True)             # Define a positive analytic variable
f_x=1/(sp.sqrt(2*np.pi)*s_lnX*x_)*sp.exp(-1/2*((sp.log(x_)-m_lnX)/s_lnX)**2)#PDF
F_x=sp.integrate(f_x,(x_,0,x_))              # CDF
```

Python – $\boldsymbol{X} \sim \ln\mathcal{N}(\boldsymbol{\lambda}, \zeta)$ []

```
# Code snippet - Python multivariate lognormal R.V.
from scipy.stats import multivariate_normal
import numpy as np
m_X1  = 1                # Mean X1
m_X2  = 1                # Mean X2
s_X1  = 0.5              # Standard deviation X1
s_X2  = 0.5              # Standard deviation X2
rho  = 0.6               # Correlation coefficient
x1x2  = [2,2]            # Values of x to be evaluated

# Parameters
s_ln  = lambda m,s : np.sqrt(np.log(1+(s/m)**2)) # std
m_ln  = lambda m,s_ln_ : np.log(m)-0.5*s_ln_**2  # mean
s_lnX1  = s_ln(m_X1,s_X1)                        # std ln(X1)
m_lnX1  = m_ln(m_X1,s_lnX1)                      # mean ln(X1)
s_lnX2  = s_ln(m_X2,s_X2)                        # std ln(X2)
m_lnX2  = m_ln(m_X2,s_lnX2)                      # mean ln(X2)

rho_lnX1X2=1/(s_lnX1*s_lnX2)*np.log(1+rho*(s_X1/m_X1)*(s_X2/m_X2))# Corr. coeff.
M_lnX  = [m_lnX1,m_lnX2]
S_lnXX  = [[s_lnX1**2, rho_lnX1X2*s_lnX1*s_lnX2],\
            [rho_lnX1X2*s_lnX1*s_lnX2, s_lnX2**2]]

# Numerical evaluation
f_x1x2MR=multivariate_normal.pdf(np.log(x1x2),M_lnX,S_lnXX)/np.prod(x1x2,axis=0)
```

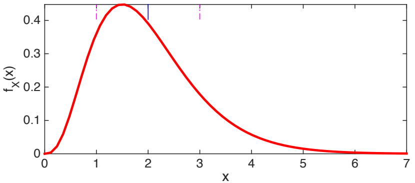
Plan de la section

Loi Gamma, $X \sim \text{Gam}(k, \theta)$

Densité de probabilité (PDF) pour X : $x \in (0, +\infty)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} \exp\left[-\frac{x}{\theta}\right]$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \gamma(k, x/\theta)$$



où $\gamma(k, x/\theta)$ est la fonction gamma incomplète et

$$\begin{aligned} \mu_X &= k\theta \\ \sigma_X^2 &= k\theta^2 \end{aligned}$$

Application: Somme de V.A. exponentielles
e.g. accumulation d'endommagement par fatigue

Python – $X \sim \text{Gam}(k, \theta)$ [ ]

```python
# Code snippet - Python Gamma R.V.
from scipy.stats import gamma as gamma_rd
from scipy.special import gamma
from sympy import Symbol, symbols, Eq, solve, nsimplify
import sympy as sp
import numpy as np

# Parameters
m_X = 2                          # Mean of X
s_X = 1                          # Standard deviation of X
k, theta = symbols('k theta')
eq1 = Eq(k*theta - m_X)
eq2 = Eq(k*theta**2 - s_X**2)
slv=solve((eq1,eq2), (k, theta))
k = np.int16(slv[0][0])
theta = np.float32(slv[0][1])

# Numerical evaluation
x = np.arange(0, 3, 0.01)        # Values of x to be evaluated
f_x = gamma_rd.pdf(x,k,theta)

# Analytic formulation
x_ = Symbol('x_', positive=True) #Define a positive analytic variable
f_x = 1/(gamma(k)*theta**k) * x_**(k-1) * sp.exp(-x_/theta)
F_x = sp.integrate(f_x,(x_,0,x_))
```

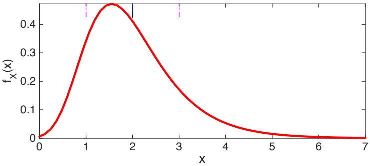
Plan de la section

Loi Gumbel, $X \sim \text{Gum}(\mu, \beta)$

Densité de probabilité (PDF) pour X : $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left[-\frac{x-\mu}{\beta} - \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\beta}\right\}\right]$$

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\beta}\right\}\right]$$



où

$$\begin{aligned} \mu_X &= \mu + \beta\gamma, \quad \overbrace{\gamma \approx 0.57721}^{\text{constante d'Euler}} \\ \sigma_X^2 &= \frac{\pi^2\beta^2}{6} \end{aligned}$$

Application: Valeur maximale sur un interval de temps

Python – $X \sim \text{Gum}(\mu, \beta)$ [🐍]

```
# Code snippet - Python Gumbel R.V.
from scipy.stats import genextreme
from scipy.special import gamma
from sympy import Symbol, symbols, Eq, solve
import sympy as sp
import numpy as np

m_X = 1                    # Mean of X
s_X = 1                    # Standard deviation of X
d_X = s_X/m_X              # Coefficient of variation , C.O.V.
x = np.arange(-3, 3, 0.01) # Values of x to be evaluated

# Parameters
mu, beta = symbols('mu beta')
eq1 = Eq(mu+beta*0.5772 - m_X)
eq2 = Eq(np.pi**2/6*beta**2 - s_X**2)
slv2=solve((eq1,eq2), (mu, beta))
mu = np.float32(slv2[0][0])
beta = np.float32(slv2[0][1])

# Numerical evaluation
f_x = genextreme.pdf(x,0,mu,beta)

# Analytic formulation
x_ = Symbol('x_', positive=True)  #Define a positive analytic variable
f_x = 1./beta*sp.exp(-((x_-mu)/beta+sp.exp(-(x_-mu)/beta)))
F_x = sp.integrate(f_x,(x_,0,x_))
```

Plan de la section

Loi Beta, $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$

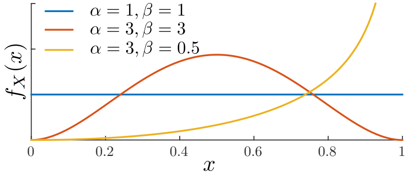
Densité de probabilité (PDF) pour X : $x \in (0, 1)$

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \mathrm{B}(\alpha,\beta): \text{ Fonction Beta} \end{cases}$$

Soit deux évènements ME&CE

$$\mathcal{S} = \{A, \overline{A}\} \begin{cases} \Pr(A) = X \\ \Pr(\overline{A}) = 1 - X \end{cases}$$

α : # d'observations de A
β : # d'observations de $\overline{A}$



Exemple – Loi Beta [.m]

$$\mathcal{S} = \{\text{Head, Tail}\}, \quad \Pr(\{\text{Head}\}) = X$$

Python – $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ [🐍]

```python
# Code snippet - Python Beta R.V.
from scipy.stats import beta
from matplotlib import pyplot as plt, cm
import numpy as np

a = 3                          # \alpha
b = 2                          # \beta
x = np.arange(0, 1, 0.001) # Values of x to be evaluated
f_x = beta.pdf(x,a,b)          # PDF of X
plt.plot(x, f_x)               # Plot the PDF of X
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$f_X(x)$')
plt.show()
```

Résumé

Loi normale univariée:
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), x \in (-\infty, +\infty)$

si $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\ \ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$\begin{array}{rcl} Z & = & X + Y \\ & \sim & \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2) \end{array}$$

Loi normale multi-variée:
$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{M_X}, \mathbf{\Sigma_{XX}})$

Loi normale conditionnelle:
$f_{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1|\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{M}_{1|2}, \mathbf{\Sigma}_{11|2})$

Loi normale centrée réduite:
$\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Loi lognormale univariée:
$X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda, \zeta), x \in (0, +\infty)$

si $X \sim \ln\mathcal{N}(\lambda_X, \zeta_X^2),\ \ Y \sim \ln\mathcal{N}(\lambda_Y, \zeta_Y^2)$

$$\begin{array}{rcl} Z & = & X \cdot Y \\ & \sim & \ln\mathcal{N}(\lambda_Z, \zeta_Z^2) \end{array}$$

Loi Gamma:
$X \sim \text{Gam}(k, \theta), x \in (0, +\infty)$

Loi Gumbel:
$X \sim \text{Gum}(\mu, \beta), x \in (-\infty, +\infty)$

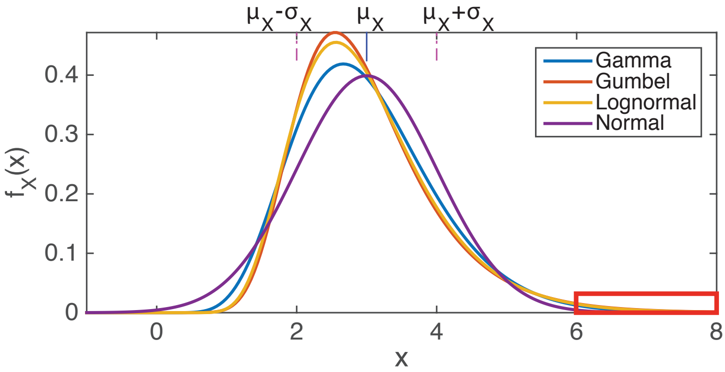
Loi Beta:
$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta), x \in (0, 1)$

Utilisation en pratique:

`https://www.jcss-lc.org/jcss-probabilistic-model-code/`

Comparaison des densités de probabilité [.m]

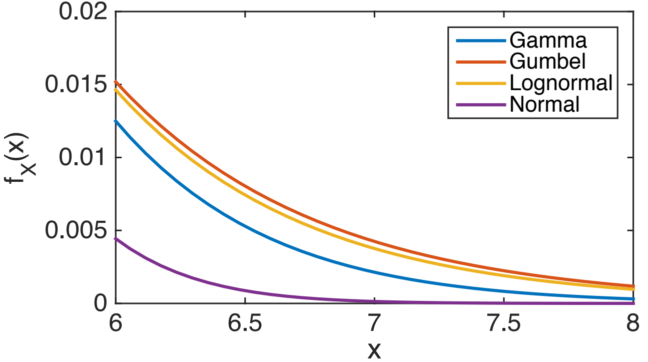
Pour $\mu_X = 3$ et $\sigma_X = 1$



Quelle est la différence entre ces distributions?
Pourquoi est-ce important?

Comparaison des densités de probabilité [.m]

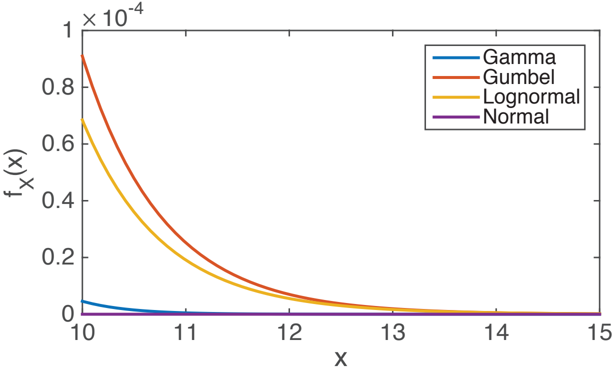
Pour $\mu_X = 3$ et $\sigma_X = 1$



Quelle est la différence entre ces distributions?
Pourquoi est-ce important?

Comparaison des densités de probabilité [.m]

Pour $\mu_X = 3$ et $\sigma_X = 1$



Quelle est la différence entre ces distributions?
Pourquoi est-ce important?

Théorie probabilité
- 0 Révision algèbre & probabilités
- 1 Lois de probabilités
- 3 PDF multivariés

Fiabilité des structures & systèmes
- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes $g_1(\mathbf{X})$
- 9 Formulation fiabilité systèmes

Estimation – p_f échantillonnage
- 4 Monte Carlo
- 12 Échantillonnage par importance

Estimation – p_f analytique
- 5 FOSM
- 6 FORM
- 8 SORM

Utilisation des résultats

- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques
- 11 Données empiriques
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques