Module #13
Prise de décisions

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal

D. W. North, A tutorial introduction to decision theory, Systems Science and Cybernetics, IEEE Transactions on, vol. 4, no. 3, pp. 200-210, 1968.

Prise de décisions à partir de p_f



Analyse sur-simplifiée

$p_f > p_{f,\text{adm.}} \rightarrow$ **remplacer ($\mathcal{R}$)** où **attendre ($\mathcal{A}$)**?

Risque: probabilités × conséquences ($)

Théorie de l'utilité:

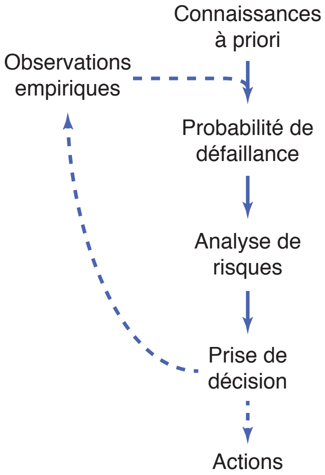
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\$|\mathcal{A}) &= p_f \times \$\text{ fail} + (1 - p_f) \times 0\$ \\ \mathbb{E}(\$|\mathcal{R}) &= \$\mathcal{R} + p_{f,\text{adm.}} \times \$\text{ fail} + (1 - p_{f,\text{adm.}}) \times 0\$\end{aligned}$$

- 1 \$ aujourd'hui $\neq$ 1 \$ dans 20 ans (**actualisation des coûts**)
- Un gain de 1 \$ n'a pas la même utilité selon si on à déjà 1 \$ ou 1 000 000 \$ (**aversion du risque**)

[Beyond Ktaadn,Bloomberg]

Mise en contexte

- **Connaissances à priori**: Structure pour laquelle plusieurs variables sont incertaines
- **Probabilité de défaillance**: Estimation de p_f à partir des méthodes présentées: M4-M6, M8, ou M12
- **Analyse de risque**: probabilités $\times$ conséquences \$
- **Prise de décision**: Minimiser l'espérance mathématique des pertes
- **Actions**: Remplacement, réparation, attendre, mesurer, etc.



Plan du module #13

Organisation de la matière

Théorie probabilité
- 0 Révision algèbre & probabilités
- 1 Lois de probabilités
- 3 PDF multivariés

Fiabilité des structures & systèmes
- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes $g_1(\mathbf{X})$
- 9 Formulation fiabilité systèmes

Estimation – p_f échantillonnage
- 4 Monte Carlo
- 12 Échantillonnage par importance

Estimation – p_f analytique
- 5 FOSM
- 6 FORM
- 8 SORM

Utilisation des résultats
- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques
- 11 Données empiriques
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques

Plan de la section

Théorie de la décision/utilité - Introduction

Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un ensemble d'actions possibles

Décision rationnelle:

Choisir l'**action** a_i^* qui minimise l'espérance mathématique des **pertes** $L(C)$

- C: Coûts
- $L(C)$: Fonction de perte

Théorie de la décision/utilité – Définitions

Évènements, E: $\mathcal{S} = \{\text{Défaillance (D), Survie (S)}\}$, $\Pr(D) = p_f$

Actions, a: $\mathcal{A} = \{\text{Attendre (A), Remplacer (R)}\}$

$$\Pr(D|a) = \begin{cases} p_f & , a = A \\ p_{f,new} \ll p_f & , a = R \end{cases}$$

Coûts conditionnels:

Coûts$|a$	$E = D$	$E = S$
$a = A$	$C_{D|A}$	$C_{S|A}$
$a = R$	$C_{D|R}$	$C_{S|R}$

$C_{D|A}$: \$ défaillance si rien n'est fait
$C_{S|A}$: \$ actualisé d'un remplacement dans n années
$C_{D|R}$: \$ remplacement + \$ défaillance de la nouvelle structure
$C_{S|R}$: \$ remplacement

Actualisation des coûts

Soit

$$\left.\begin{array}{ll} r_{\text{const.}}: & \text{Inflation des coûts de construction} \\ r_{\text{intérêts}}: & \text{Taux d'intérêt} \end{array}\right\} r_{\text{const.}} \leq r_{\text{interets}}$$

Pour un coût de construction actuel C_0, le coût projeté dans T années est

$$C_{0\rightarrow m} = C_0 \cdot (1 + r_{\text{const.}})^T$$

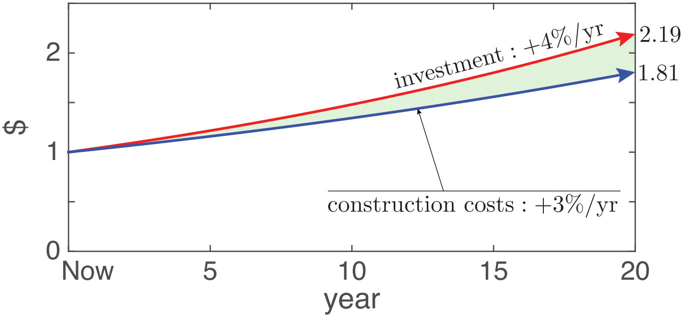
Pour un coût de construction projeté dans T années, le coût actualisé $C_{T\rightarrow 0}$ à la valeur d'aujourd'hui est

$$C_{m\rightarrow 0} = C_x/(1 + r_{\text{interet}})^T$$

Exemple – actualisation des coûts [.m]

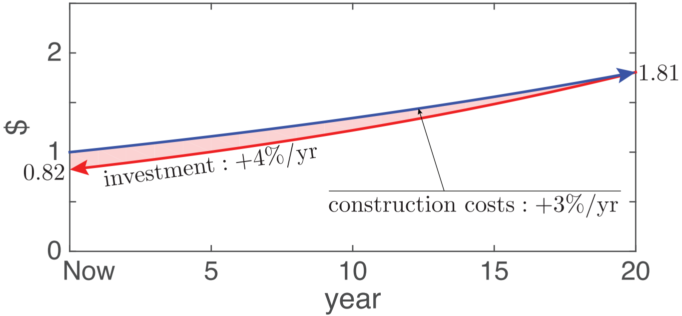
$r_{\text{const.}} = 0.03$: Inflation des coûts de construction

$r_{\text{interets}} = 0.04$: Taux d'intérêt



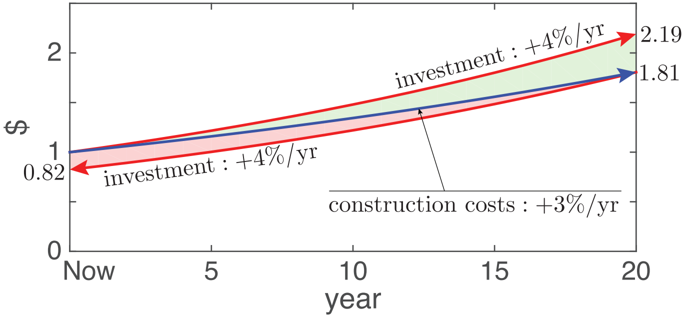
Exemple – actualisation des coûts [.m]

$r_{\text{const.}} = 0.03$: Inflation des coûts de construction
$r_{\text{interets}} = 0.04$: Taux d'intérêt



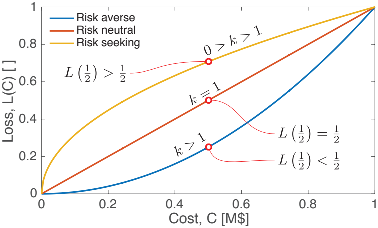
Exemple – actualisation des coûts [.m]

$r_{\text{const.}} = 0.03$: Inflation des coûts de construction
$r_{\text{interets}} = 0.04$: Taux d'intérêt



Fonction de perte $L(C)$ [.m]

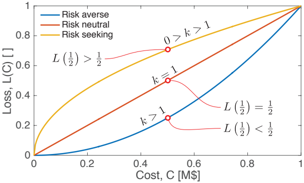
$L(C)$: pondération subjective des coûts en fonction de l'aversion/propension au risque
($\pm$ **1$ n'a pas le même effet si l'on a déjà 1$ ou 1M$**)



Gens/organisations: aversion du risque

$$L(C) = C^k \begin{cases} k > 1 & \text{Aversion au risque} \\ k = 1 & \text{Neutre} \\ 0 < k < 1 & \text{Propension du risque} \end{cases}$$

Attitude face au risques



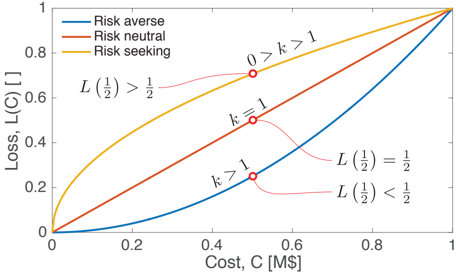
$$L(C) = C^k \begin{cases} k > 1 & \text{Aversion au risque} \\ k = 1 & \text{Neutre} \\ 0 < k < 1 & \text{Propension du risque} \end{cases}$$

Une attitude **neutre** face aux risques **minimise l'espérance des coûts pour un ensemble de décisions**

- Assureurs: attitude **neutre** face aux risques
- Assurés: **aversion du risque**; ils payent une prime pour ne pas être dans une situation de risque neutre (i.e. coûts moyens plus élevés à long terme)

Pertes conditionnelles

Fonction de perte



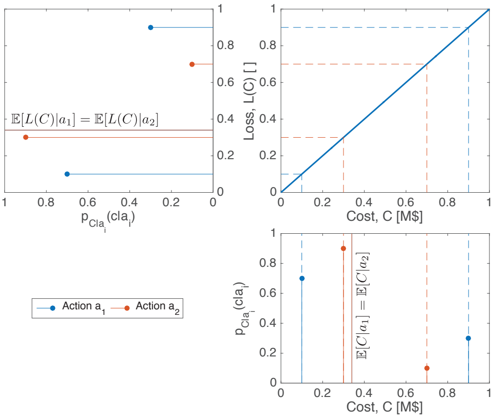
Coûts conditionnels $\rightarrow$ pertes conditionnelles:

Coûts$\vert a$	$E = D$	$E = S$
$a = A$	$C_{D\vert A}$	$C_{S\vert A}$
$a = R$	$C_{D\vert R}$	$C_{S\vert R}$

$\rightarrow$

Pertes$\vert a$	$E = D$	$E = S$	$\mathbb{E}[L(C)\vert a]$
$a = A$	$L(C_{D\vert A})$	$L(C_{S\vert A})$	$\mathbb{E}[L(C)\vert a = A]$
$a = R$	$L(C_{D\vert R})$	$L(C_{S\vert R})$	$\mathbb{E}[L(C)\vert a = R]$

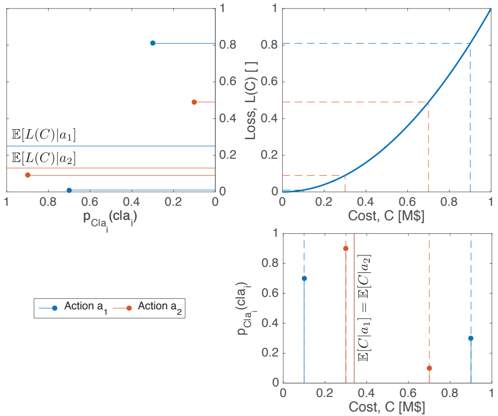
$\mathbb{E}[L(C)|a]$ et aversion du risque (ex. discret) [.m]



Si la propension au risque n'est pas neutre:

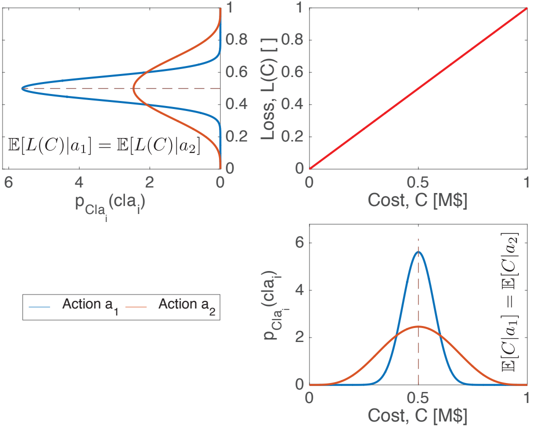
$$\mathbb{E}[L(C)|a_1] \neq \mathbb{E}[L(C)|a_2]$$

$\mathbb{E}[L(C)|a]$ et aversion du risque (ex. discret) [.m]



Si la propension au risque n'est pas neutre:
$$\mathbb{E}[L(C)|a_1] \neq \mathbb{E}[L(C)|a_2]$$

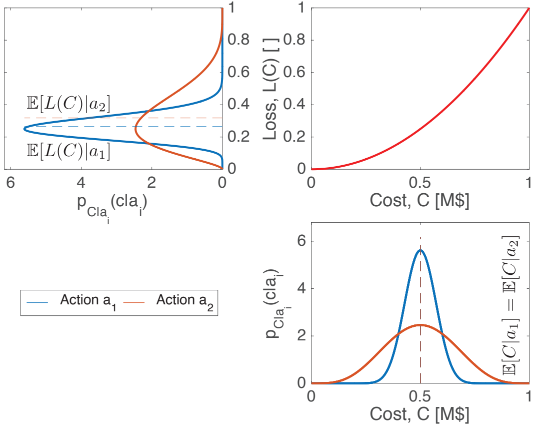
$\mathbb{E}[L(C)|a]$ et aversion du risque (ex. continu) []



Si la propension au risque n'est pas neutre:

$$\mathbb{E}[L(C)|a_1] \neq \mathbb{E}[L(C)|a_2]$$

$\mathbb{E}[L(C)|a]$ et aversion du risque (ex. continu) [.m]



Si la propension au risque n'est pas neutre:

$$\mathbb{E}[L(C)|a_1] \neq \mathbb{E}[L(C)|a_2]$$

Théorie de la décision/utilité

Décision rationnelle:
Minimisation de l'espérance mathématique des pertes

$$a_i^* = \arg\min_{a_i} \mathbb{E}[L(C)|a_i]$$

où

Maximisation de l'espérance mathématique des l'utilité

$$a_i^* = \arg\max_{a_i} \mathbb{E}[U(C)|a_i] \equiv \arg\max_{a_i} \mathbb{E}[-L(C)|a_i]$$

Plan de la section

Analyse paramétrique

Quelle est l'influence des paramètres d'analyse sur la décision de remplacer ou non une structure existante?

Théorie de la décision/utilité – Exemple

Évènements, E: $\mathcal{S} = \{\text{Défaillance (D), Survie (S)}\}$

Actions, a: $\mathcal{A} = \{\text{Attendre (A), Remplacer (R)}\}$

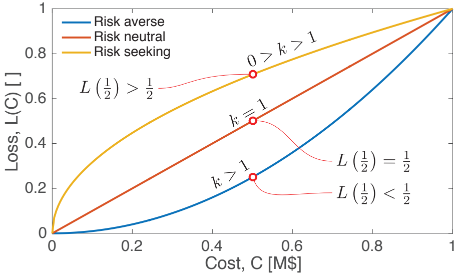
$$\Pr(D|a) = \begin{cases} p_f = \Phi(-\beta) & , a = A \\ p_{f,new} = \Phi(-\beta_{\text{new}}) \ll p_f & , a = R \end{cases}$$

Coûts conditionnels:

Coûts$\|a$	$E = D$	$E = S$
$a = A$	$C_{D\|A} = n \cdot C_{S\|R}$	$C_{S\|A} = C_{S\|R} \cdot \frac{(1+r_{\text{constr.}})^T}{(1+r_{\text{interets}})^T}$
$a = R$	$C_{D\|R} = (n+1) \cdot C_{S\|R}$	$C_{S\|R} = 1$

$C_{D|A}$: \$ défaillance si rien n'est fait
$C_{S|A}$: \$ actualisé d'un remplacement dans T années
$C_{D|R}$: \$ remplacement + \$ défaillance de la nouvelle structure
$C_{S|R}$: \$ remplacement

Fonction de perte (rappel)



$$L(C) = C^k \begin{cases} k > 1 & \text{Aversion au risque} \\ k = 1 & \text{Neutre} \\ 0 < k < 1 & \text{Propension du risque} \end{cases}$$

Calcul de $p_{f,T}$

- p_f: probabilité de défaillance annuelle
- $p_{f,T}$: probabilité d'avoir une défaillance sur une période de T années

Loi d'inclusion exclusion:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\Pr(E_i) \underbrace{- \sum_{i<j}\Pr(E_iE_j) + \sum_{i<j<k}\Pr(E_iE_jE_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\Pr(E_1E_2\cdots E_n)}_{\approx 0,\text{ pour } p_f \ll 1}$$

Hypothèse simplificatrice (borne supérieure):

$$p_{f,T} \triangleq \Pr\left(\bigcup_{t=1}^{T} D\right) \approx \sum_{t=1}^{T} p_f$$

Espérance mathématique des pertes

$$\mathbb{E}[L(C)|a=A] = \underbrace{\Pr(D|a=A)}_{\Pr(\text{défaillance}|A)} \cdot L(\overbrace{n \cdot C_{S|R}}^{\$\text{ défaillance}}) + \underbrace{\Pr(S|a=A)}_{\Pr(\text{survie}|A)} \cdot L(\overbrace{C_{S|R} \cdot \frac{1.03^T}{(1+r_{\text{interets}})^T}}^{\$\text{ rempl. actualisés}})$$

$$\mathbb{E}[L(C)|a=R] = \underbrace{\Pr(D|a=R)}_{\Pr(\text{défaillance}|R)} \cdot L(\overbrace{(n+1) \cdot C_{S|R}}^{\$\text{ défaillance}}) + \underbrace{\Pr(S|a=R)}_{\Pr(\text{survie}|R)} \cdot L(\overbrace{1}^{C_{S|R}=\$\text{ remplacement}})$$

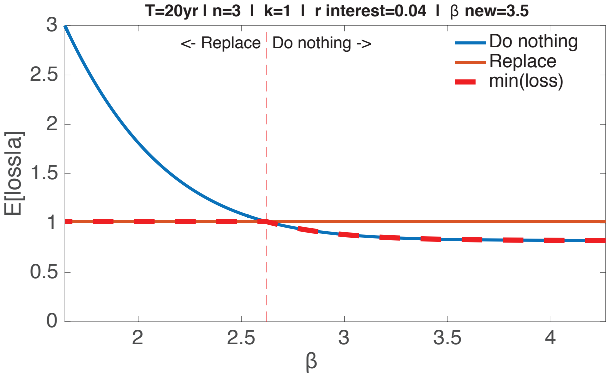
Note: $\underbrace{\Pr(D|a=A)}_{\Pr(\text{défaillance}|A)} \gg \underbrace{\Pr(D|a=R)}_{\Pr(\text{défaillance}|R)}$

Analyse paramétrique

Paramètres étudiés:

- T: Nombre d'années avant le remplacement planifié
- n: Facteur de multiplication des coûts du à une défaillance
- k: Perception du risque
  - $k > 1$: Aversion du risque
  - $k = 1$: Neutre
  - $0 < k < 1$: Propension au risque
- r_{interet}: Taux d'intérêts
- β_{new}: Indice de fiabilité d'une nouvelle structure

Analyse paramétrique [.m]



Action optimale:

- Remplacement: Si $\mathbb{E}[L(C)|a = R] < \mathbb{E}[L(C)|a = A]$
- Attente: ...sinon

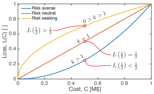
Résumé

Décision rationnelle:

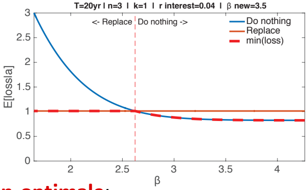
Choisir l'**action** a_i^* qui minimise l'espérance mathématique des **pertes** $L(C)$

$$a_i^* = \min_{a_i} \mathbb{E}[L(C)|a_i]$$

$L(C)$: pondération subjective des coûts en fonction de l'aversion/propension au risque (**$\pm$ 1$ n'a pas le même effet si l'on a déjà 1$ ou 1M$**)



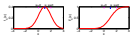
$$L(C) = C^k \begin{cases} k > 1 & \text{Aversion au risque} \\ k = 1 & \text{Neutre} \\ 0 < k < 1 & \text{Propension du risque} \end{cases}$$



Action optimale:

- Remplacement: Si $\mathbb{E}[L(C)|a = R] < \mathbb{E}[L(C)|a = A]$
- Attente: ...sinon

Théorie probabilité

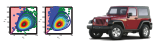
- 0 Révision algèbre & probabilités 
- 1 Lois de probabilités 
- 3 PDF multivariés 

Fiabilité des structures & systèmes

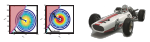
- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes 

- 9 Formulation fiabilité systèmes 

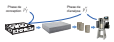
Estimation – p_f échantillonnage

- 4 Monte Carlo 
- 12 Échantillonnage par importance 

Estimation – p_f analytique

- 5 FOSM 
- 6 FORM 
- 8 SORM 

Utilisation des résultats

- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques 
- 11 Données empiriques 
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques