

# Module #12

## Estimation de la fiabilité: méthodes d'échantillonnage Monte Carlo avancées

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines  
 Polytechnique Montréal

# Estimation de $p_f$ à l'aide d'échantillonnage Monte Carlo

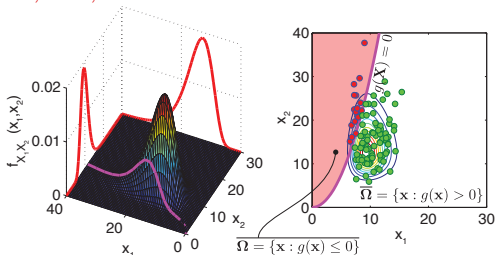
$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ : ensemble de variables aléatoires

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ : densité de probabilité conjointe

$g(\mathbf{X})$ : fonction d'état limite

$\Omega = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{X}) \leq 0\}$ : domaine de défaillance

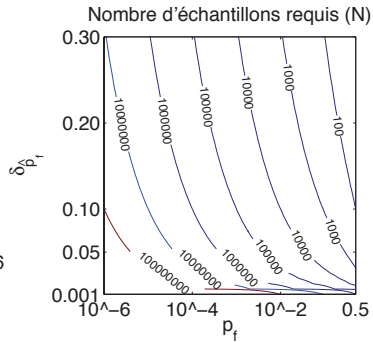
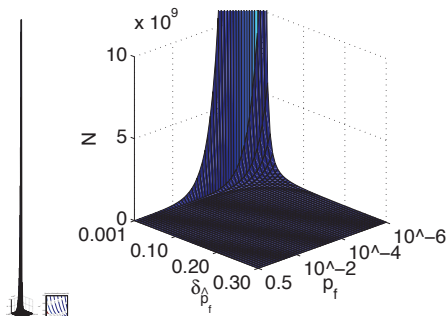
$\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, m$ : **échantillons de  $\mathbf{X}$**



**En général, très peu d'échantillons se trouveront dans le domaine de défaillance  $\Omega$**

# Limitation de l'échantillonnage Monte Carlo [m]

Nombre d'échantillons requis,  $N = \frac{1 - p_f}{p_f \delta_{p_f}^2}$



**$N$  est prohibitif pour de faibles valeurs de  $p_f$**

# Problématique?

Comment peut-on réduire la variance de notre estimation  $\hat{p}_f$  en choisissant de meilleures techniques d'échantillonnage?

1. **Échantillonnage préférentiel**
2. Échantillonnage directionnel
3. Échantillonnage par sous-ensembles
4. ...

 Plan du module #12

---

**Introduction****Rappel  $\hat{p}_{f,MC}$** **Échantillonnage  
préférentiel****Exemple****Systèmes****Résumé**

---

**Organisation de la matière**

|                                                          |   |    |                                        |                                                                                              |
|----------------------------------------------------------|---|----|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Théorie<br/>probabilité</i>                           | { | 0  | Révision algèbre & probabilités        |           |
|                                                          |   | 1  | Lois de probabilités                   |           |
|                                                          |   | 3  | PDF multivariés                        |            |
| <i>Fiabilité des<br/>structures<br/>&amp; systèmes</i>   | { |    | Introduction                           |                                                                                              |
|                                                          |   | 2  | Formulation fiabilité composantes      | $g_1(X)$  |
|                                                          |   | 9  | Formulation fiabilité systèmes         |           |
| <i>Estimation – <math>p_f</math><br/>échantillonnage</i> | { | 4  | Monte Carlo                            |             |
|                                                          |   | 12 | Échantillonnage par importance         |           |
| <i>Estimation – <math>p_f</math><br/>analytique</i>      | { | 5  | FOSM                                   |             |
|                                                          |   | 6  | FORM                                   |             |
|                                                          |   | 8  | SORM                                   |             |
| <i>Utilisation des<br/>résultats</i>                     | { | 7  | Analyse de sensibilité                 |                                                                                              |
|                                                          |   | 10 | Incertitudes aléatoires & épistémiques |           |
|                                                          |   | 11 | Données empiriques                     |           |
|                                                          |   | 13 | Prise de décision                      |                                                                                              |
|                                                          |   | 14 | Métamodèles & modèles empiriques       |                                                                                              |

# Estimation de $\hat{p}_{f,MC}$ - Échantillonnage Monte Carlo

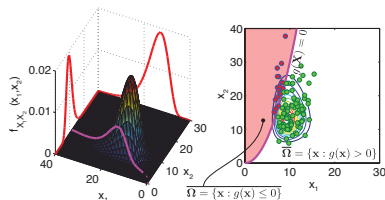
**Fonction indicatrice:**

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Espérance mathématique de  $p_f$  :**

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{x}} I(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \mathbb{E}[I(\mathbf{X})] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$$\hat{p}_{f,MC} = \widehat{\mathbb{E}[I(\mathbf{X})]} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}_i)$$



$$\mathbf{x}_i \sim h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

# Estimation de $p_f$ - Échantillonnage préférentiel

$h(\mathbf{x})$ ,  $h(\mathbf{u})$ : **Densité d'échantillonnage**

$$p_f = \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\hat{p}_{f,MCP} = \mathbb{E} \left[ \widehat{l(\mathbf{X}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}} \right] = \overbrace{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l(\mathbf{x}_i) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_i)}}^{\text{échantillonnage dans l'espace original}} = \overbrace{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l(\mathbf{u}_i) \frac{\phi_n(\mathbf{u}_i)}{h(\mathbf{u}_i)}}^{\text{échantillonnage dans l'espace normal centré réduit}}$$

L'échantillonnage peut être fait dans l'espace original ou dans l'espace normal centré réduit,  $h(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x})$

## $\hat{p}_{f,MCP}$ - Choix de la densité d'échantillonnage $h(\mathbf{x})$

**Critère:** La densité de probabilité est non-nulle dans le domaine de défaillance

$$h(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

**Densité d'échantillonnage optimale:**

$$h(\mathbf{x}) = \frac{I(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{p_f}$$

$$\hat{p}_{f,MCP} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}_i) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{\frac{I(\mathbf{x}_i)f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_f}} = p_f$$

**Comme on ne connaît pas  $p_f$  on ne peut utiliser cette densité d'échantillonnage optimale**

## $\hat{p}_{f,MCP}$ - Choix de la densité d'échantillonnage $h(\mathbf{x})$ (cont.)

### 1- Échantillonnage autour du point de conception $\mathbf{x}^*$

(obtenu à partir d'une analyse FORM)

$$h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \phi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

### 2- Échantillonnage adaptatif

1. Effectuer un échantillonnage Monte Carlo traditionnel
2. Calculer la position moyenne des échantillons se trouvant dans le domaine de rupture,  $\mathbf{u}^{*,MC}$
3. Effectuer un échantillonnage préférentiel où

$$h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \phi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{*,MC})$$

# Propriétés de l'estimateur $\hat{p}_{f,MCP}$

## 1 - Espérance mathématique de $\hat{p}_{f,MCP}$

$$\mathbb{E}[\hat{p}_{f,MCP}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \left[ I(\mathbf{x}_i) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_i)} \right]$$

## 2 - Variance de $\hat{p}_{f,MCP}$

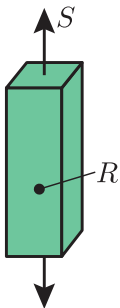
$$\text{Var}[\hat{p}_{f,MCP}] = \frac{1}{m} \text{Var} \left[ I(\mathbf{x}_i) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_i)} \right]$$

## Exemple #12.2 (ref. Ex. 6.4) [m]

Soit  $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$  et  $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$  où:

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ : distribution conjointe de type **Nataf**

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases} \quad S \begin{cases} \mu_S = 15 \text{ kN} \\ \sigma_S = 5 \text{ kN} \end{cases} \quad f_y = 300 \text{ MPa}, \quad \rho_{D,S} = 0.30$$



$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, \quad g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

**Comparaison de  $\sigma_{\hat{p}_{f,MC}}$  et  $\sigma_{\hat{p}_{f,MCP}}$   
pour un même nombre d'échantillons  $m$**

## Exemple #12.2 - résolution

$$\mathbf{u}^* = \left\{ \begin{array}{c} -1.14 \\ 1.21 \end{array} \right\} \text{ (solution FORM)}$$

$$h(\mathbf{x}_i) = \phi_n(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}^*)$$

$$\hat{p}_{f,MCP} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(\mathbf{x}(\mathbf{u}_i)) \frac{\phi_n(\mathbf{u}_i)}{\phi_n(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}^*)}$$

$$\text{Var}[\hat{p}_{f,MCP}] = \frac{1}{m} \text{Var} \left[ I(\mathbf{x}(\mathbf{U})) \frac{\phi_n(\mathbf{U})}{\phi_n(\mathbf{U} - \mathbf{u}^*)} \right]$$

## Exemple #12.2 - résolution (cont.)

```
from scipy.stats import multivariate_normal
import numpy as np

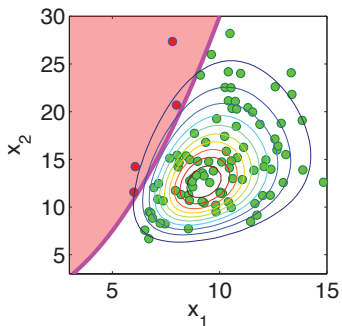
m = 1000
I=np.eye(len(u_star))
u_MCSP=multivariate_normal.rvs(u_star,I,nb_samp).transpose()
x_MCSP= xTu(u_MCSP)
f_u1u2MCSP
    =multivariate_normal.pdf(u_MCSP,np repmat([0,0],[m,1]),np repmat(I,[1,1,m]))
h_u1u2MCSP
    =multivariate_normal.pdf(u_MCSP,np repmat([u_star],[m,1]),np repmat(I,[1,1,m]))

I=(gX(x_MCSP)<=0).*f_u1u2MCSP'./h_u1u2MCSP'
pfMCP=sum(I)/m
var_pfMCP=var(I)/m
```

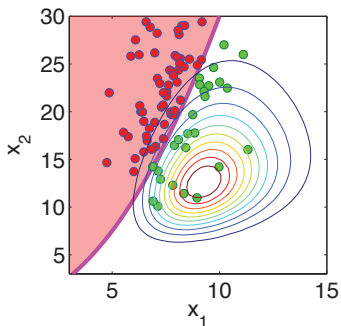
Résultats (note: Pour  $m = 1 \times 10^7$ ,  $\hat{p}_{f,MC} \approx 0.049$ ) [🔥]

Pour  $m = 100$  échantillons

$$\hat{p}_{f,MC} = 0.040$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.03 (\times 5)$$



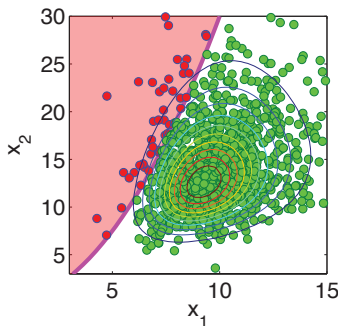
$$\hat{p}_{f,MCP} = 0.053$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MCP}} = 0.006$$



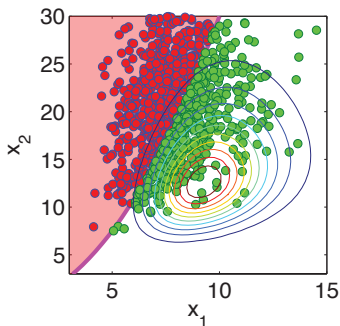
Résultats (note: Pour  $m = 1 \times 10^7$ ,  $\hat{p}_{f,MC} \approx 0.049$ ) [🔥]

Pour  $m = 1\,000$  échantillons

$$\hat{p}_{f,MC} = 0.046$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.006 \text{ (}\times 3\text{)}$$



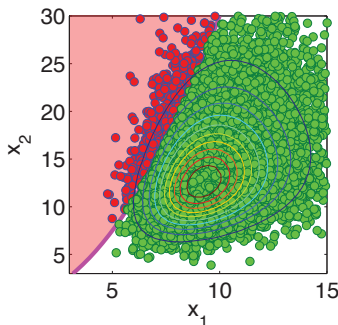
$$\hat{p}_{f,MCP} = 0.047$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MCP}} = 0.002$$



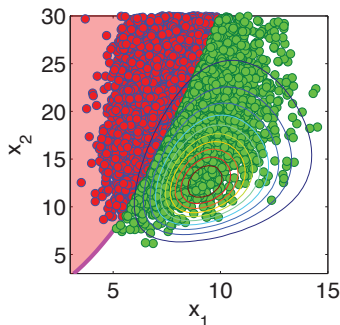
Résultats (note: Pour  $m = 1 \times 10^7$ ,  $\hat{p}_{f,MC} \approx 0.049$ ) [🔥.m]

Pour  $m = 10\,000$  échantillons

$$\hat{p}_{f,MC} = 0.048$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.002 \text{ (}\times 3\text{)}$$



$$\hat{p}_{f,MCP} = 0.049$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MCP}} = 0.0007$$

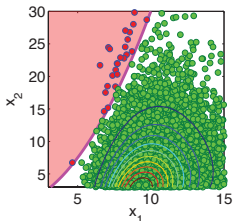


## Résultats - performance relative

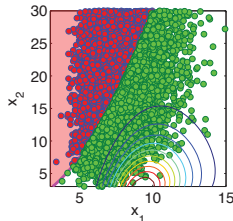
La performance relative d'un échantillonnage préférentiel par rapport à un échantillonnage Monte Carlo **augmente lorsque  $p_f$  diminue**. ex:  $\mu_S = 5$  kN

Pour  $m = 10\,000$  échantillons

$$\hat{p}_{f,MC} = 0.0027$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MC}} = 0.002 \text{ (}\times 53\text{)}$$



$$\hat{p}_{f,MCP} = 0.0005$$
$$\sigma_{\hat{p}_{f,MCP}} = 0.00004$$



# Échantillonnage préférentiel - système en série

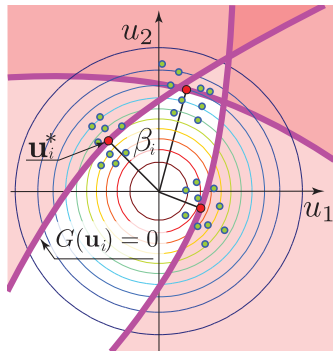
Pour un système en série à  $k$  composantes

$$h(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k w_i \phi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i^*), \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1$$

Exemple de pondérations  $w_i$ :

$$w_i \propto \Phi(-\beta_i) \approx p_{f,FORM}$$

$$w_i \propto 1/\beta_i$$

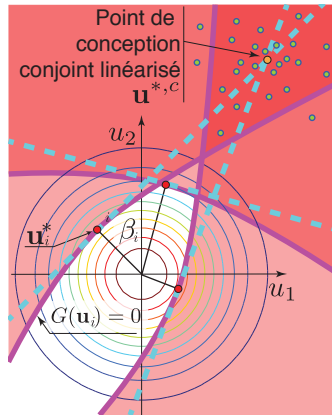


# Échantillonnage préférentiel - système en parallèle

Pour un système en parallèle à  $k$  composantes

$$h(\mathbf{u}) = \phi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{*,c})$$

i.e. on génère des échantillons autour du point de conception linéarisé  $\mathbf{u}^{*,c}$



# Résumé

**Échantillonnage préférentiel:** permet de réduire le nombre d'échantillons nécessaire pour atteindre une même précision

$$\mathbb{E}[\hat{p}_{f,MCP}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \left[ I(\mathbf{x}_i) \frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_i)} \right]$$

$$\text{Var}[\hat{p}_{f,MCP}] = \frac{1}{m} \text{Var} \left[ I(\mathbf{x}_i) \frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_i)} \right]$$

**Choix de  $h(\mathbf{x})$ :**

1- Point de conception FORM  $\mathbf{x}^*$

$$h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \phi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

2- Échantillonnage adaptatif  $\mathbf{u}^{*,MC}$

$$h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \phi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{*,MC})$$

|                                                                                   |   |    |                                        |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|----|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Théorie probabilité</i>                                                        | { | 0  | Révision algèbre & probabilités        |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                   |   | 1  | Lois de probabilités                   |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                   |   | 3  | PDF multivariés                        |                                                                                                                                                                       |
| <i>Fiabilité des structures &amp; systèmes</i>                                    | { |    | Introduction                           |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|                                                                                   |   | 2  | Formulation fiabilité composantes      | $g_1(X)$                                                                                                                                                              |
|                                                                                   |   | 9  | Formulation fiabilité systèmes         |                                                                                                                                                                       |
| <i>Estimation – <math>p_f</math> échantillonnage</i>                              | { | 4  | Monte Carlo                            |                                                                                      |
|                                                                                   |   | 12 | Échantillonnage par importance         |    |
| <i>Estimation – <math>p_f</math> analytique</i>                                   | { | 5  | FOSM                                   |     |
|                                                                                   |   | 6  | FORM                                   |     |
|                                                                                   |   | 8  | SORM                                   |     |
| <i>Utilisation des résultats</i>                                                  | { | 7  | Analyse de sensibilité                 |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|  |   | 10 | Incertitudes aléatoires & épistémiques |                                                                                                                                                                     |
|                                                                                   |   | 11 | Données empiriques                     |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                   |   | 13 | Prise de décision                      |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|                                                                                   |   | 14 | Métamodèles & modèles empiriques       |                                                                                                                                                                                                                                                        |