

Module #10

Traitement des incertitudes dans la définition de $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \theta)$

(CIV8530 - Fiabilité des structures et systèmes)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal



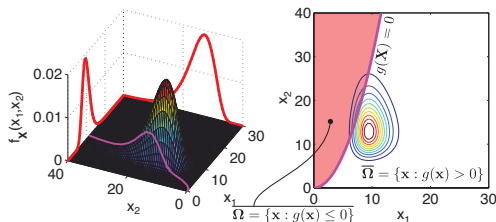
Chapitre 1.2 - A. Der Kiureghian, (2015), *Probabilistic Methods for Engineering Risk Analysis*. Department of Civil and Environmental Engineering, UC Berkeley

Probabilité de défaillance

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$: ensemble de variables aléatoires

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta_f)$: densité de probabilité conjointe
 θ_f : Paramètres de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

$g(\mathbf{x}; \theta_g)$: fonction d'état limite
 θ_g : Paramètres de $g(\mathbf{X})$



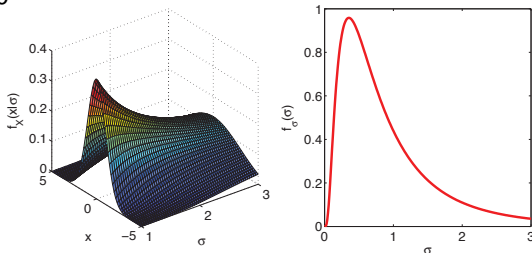
Comment traiter le cas où θ_f et θ_g sont eux même décrits par des variables aléatoires?

Problématique?

Soit une variable aléatoire $X \sim f_X(x; \sigma) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Pour $\mu = 0$



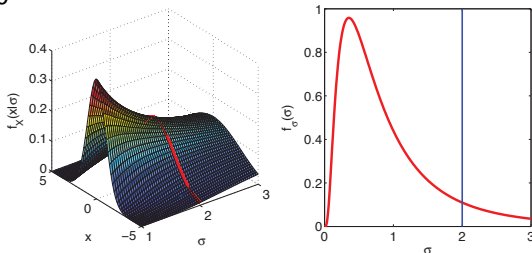
Comment l'incertitude sur les paramètres de $f_X(x)$ se répercute sur p_f ?

Problématique?

Soit une variable aléatoire $X \sim f_X(x; \sigma) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Pour $\mu = 0$



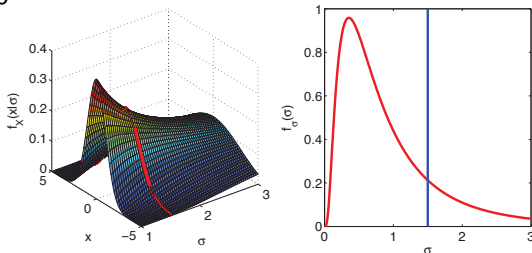
Comment l'incertitude sur les paramètres de $f_X(x)$ se répercute sur p_f ?

Problématique? [m]

Soit une variable aléatoire $X \sim f_X(x; \sigma) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Pour $\mu = 0$



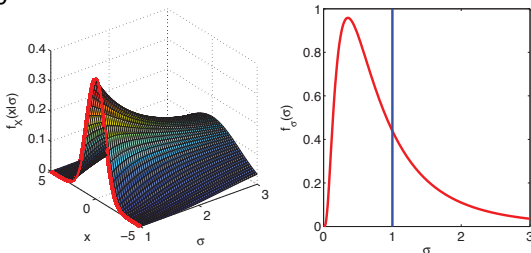
Comment l'incertitude sur les paramètres de $f_X(x)$ se répercute sur p_f ?

Problématique? [m]

Soit une variable aléatoire $X \sim f_X(x; \sigma) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Pour $\mu = 0$



Comment l'incertitude sur les paramètres de $f_X(x)$ se répercute sur p_f ?

Problématique?

Comment l'incertitude sur les paramètres de $f_X(x)$ se répercute sur p_f ?

1. $p_f(\theta)$: Probabilité de défaillance conditionnelle
2. $\hat{p}_f = p_f(\hat{\theta})$: Estimation ponctuelle de p_f à un point spécifique $\hat{\theta}$ (e.g. le point le plus probable)
3. $\tilde{p}_f = \int_{\theta} p_f(\theta) f(\theta) d\theta$: Estimation prédictive i.e. marginalisation de θ
4. intervalle de confiance $\langle p_f \rangle_{1-\alpha}$



Plan du module #10

Introduction**Nomenclature**
Conditionnelle, $p_f(\theta)$ **Ponctuelle, $\hat{p}_f$** **Prédictive, $\tilde{p}_f$** **intervalle, $\langle p_f \rangle_{1-\alpha}$** **Résumé**

Organisation de la matière

<i>Théorie probabilité</i>	{	0	Révision algèbre & probabilités	
		1	Lois de probabilités	
		3	PDF multivariés	
<i>Fiabilité des structures & systèmes</i>	{		Introduction	
		2	Formulation fiabilité composantes	$g_1(\mathbf{X})$
		9	Formulation fiabilité systèmes	
<i>Estimation – p_f échantillonnage</i>	{	4	Monte Carlo	
		12	Échantillonnage par importance	
<i>Estimation – p_f analytique</i>	{	5	FOSM	
		6	FORM	
		8	SORM	
<i>Utilisation des résultats</i>	{	7	Analyse de sensibilité	
		10	Incertitudes aléatoires & épistémiques	
		11	Données empiriques	
		13	Prise de décision	
		14	Métamodèles & modèles empiriques	

Nomenclature

Paramètres

θ_f : Paramètres associés à la densité de probabilité conjointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$

e.g. $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \underbrace{\mu, \sigma}_{\theta_f}) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

θ_g : Paramètres associés à la fonction d'état limite $g(\mathbf{x})$

e.g., $g(\mathbf{x}; \theta_g) = (x_1 - x_2)^{\theta_g}$

$$\theta = \{\theta_f, \theta_g\}$$

Densités de probabilité

$f(\theta)$: Densité de probabilité conjointe de θ

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta)$: Densité de probabilité conditionnelle de $\mathbf{x}$ sachant θ

Domaine de défaillance

$$\Omega(\mathbf{x}; \theta_g) = \{\{\mathbf{x}; \theta\} : g(\mathbf{x}; \theta_g) \leq 0\}$$



Plan de la section

Conditionnelle, $p_f(\theta)$

3.1 Probabilité de défaillance conditionnelle

3.2 Exemple

$p_f(\theta)$: Probabilité de défaillance conditionnelle

Probabilité de défaillance conditionnelle

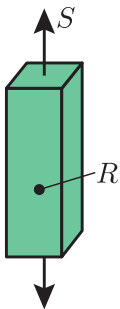
$$p_f(\theta) = \int_{\Omega(\mathbf{x};\theta)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\theta) d\mathbf{x}$$

Indice de fiabilité conditionnel

$$\beta(\theta) = \Phi^{-1} [1 - p_f(\theta)]$$

Exemple #10.1 - p_f conditionnelle (Ref. Ex. 6.2) [📄]

Soit $X_1 = D \sim \text{In}\mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

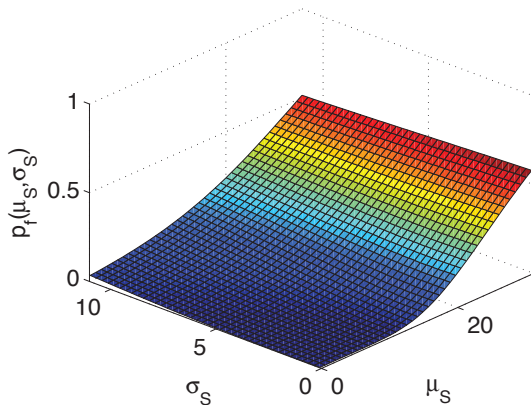
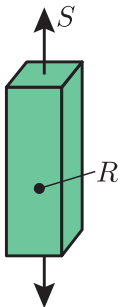


$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S = ? \text{ kN} \\ \sigma_S = ? \text{ kN} \end{cases}$$

$$f_y = 0.3 \text{ kN/m}^2, D \perp S$$

$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

Exemple #10.1 - Résultats [fig]

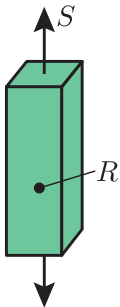


Note: chaque point de cette surface requiert une évaluation de p_f avec FORM, SORM, MCS, etc.

Exemple #10.1 (cont.)

Soit $X_1 = D \sim \text{In } \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$$D \begin{cases} \mu_D &= 10 \text{ mm} \\ \sigma_D &= 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S &\sim \text{In } \mathcal{N}(\mu_{\ln \mu_S}, \sigma_{\ln \mu_S}) \text{ kN} \\ \sigma_S &\sim \text{In } \mathcal{N}(\mu_{\ln \sigma_S}, \sigma_{\ln \sigma_S}) \text{ kN} \end{cases}$$



Comment estimer p_f lorsque les paramètres de $f_X(x)$ sont décrits par des variables aléatoires?

1. $\hat{p}_f = p_f(\hat{\theta})$: Estimation ponctuelle de p_f à un point spécifique $\hat{\theta}$, e.g. le point le plus probable.
2. $\tilde{p}_f = \int_{\theta} p_f(\theta) f(\theta) d\theta$: Estimation prédictive i.e. marginalization de θ
3. intervalle de confiance $\langle p_f \rangle_{1-\alpha}$



Plan de la section

Ponctuelle, $\hat{p}_f$

4.1 Définition

4.2 Exemple

Estimation ponctuelle, $\hat{p}_f$

$$\hat{p}_f = p_f(\hat{\theta})$$

$\hat{\theta}$: estimation ponctuelle de θ

- ▶ Moyenne
- ▶ Médiane
- ▶ Mode (Vraisemblance maximale)
- ▶ etc.

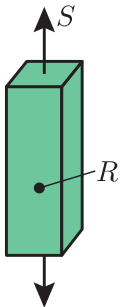


L'estimation ponctuelle néglige l'incertitude associée à θ

Exemple #10.2 - Estimation ponctuelle [🚀]

Soit $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln \mu_S}, \sigma_{\ln \mu_S}) \text{ kN} \\ \sigma_S \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln \sigma_S}, \sigma_{\ln \sigma_S}) \text{ kN} \end{cases}, \mu_S \perp \sigma_S$$

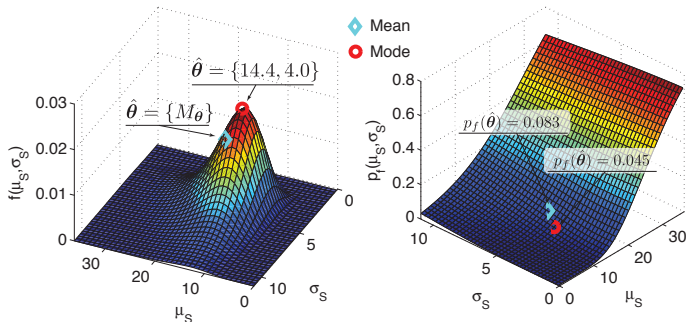
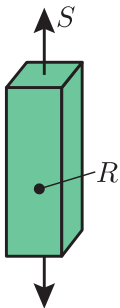


$$\mu_S \begin{cases} \mu_{\mu_S} = 15 \text{ kN} \\ \sigma_{\mu_S} = 5 \text{ kN} \end{cases}, \sigma_S \begin{cases} \mu_{\sigma_S} = 5 \text{ kN} \\ \sigma_{\sigma_S} = 2 \text{ kN} \end{cases}$$

$$f_y = 0.3 \text{ kN/m}^2, D \perp S$$

$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$

Exemple #10.2 - Résultats



→ néglige l'incertitude associée à θ



Plan de la section

Prédictive, $\tilde{p}_f$

5.1 Définition

5.2 Rappel espace normal centré réduit

5.3 Approximation du premier ordre

5.4 Exemple

Estimation prédictive, $\tilde{p}_f$

Probabilité de défaillance prédictive

$$\tilde{p}_f = \int_{\theta} p_f(\theta) f(\theta) d\theta = \mathbb{E}_{\theta} [p_f(\theta)]$$

Indice de fiabilité prédictif

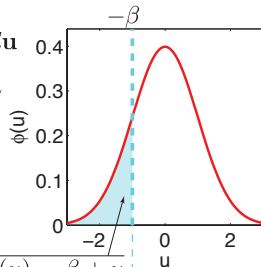
$$\beta(\theta) = \Phi^{-1} [1 - \tilde{p}_f(\theta)]$$

L'estimation prédictive est la plus appropriée pour la **prise de décision** et pour effectuer des **prédictions**

Comment estime-t-on $\tilde{p}_f$?

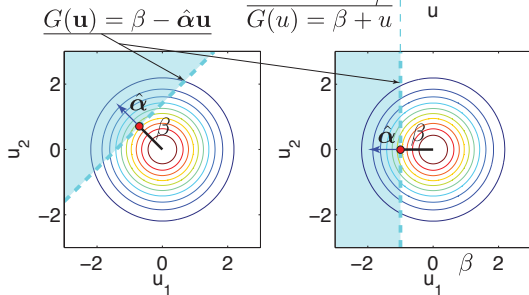
Rappel espace normal centré réduit

$$\begin{aligned}
 p_f &= \int_{G(\mathbf{u}) \leq 0} \phi_2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\
 &= \int_{G(u) \leq 0} \phi(u) du \\
 &= \int_{-\infty}^{-\beta} \phi(u) du \\
 &= \Phi(-\beta)
 \end{aligned}$$



État limite équivalent
linéarisé (FORM):

$$G(U) = \beta + U$$



Estimation prédictive, $\tilde{p}_f$ - approximation du premier ordre

Soit la fonction d'état limite linéarisé équivalente

$$\tilde{G}(\theta, U) = \beta(\theta) + U, \quad U \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\mu_{\tilde{G}(\theta, U)} = 0 + \mu_{\beta(\theta)}$$

$$\sigma_{\tilde{G}(\theta, U)}^2 = 1 + \sigma_{\beta(\theta)}^2$$

Approximation du premier ordre

$$\mu_{\beta(\theta)} \cong \beta(\mathbf{M}_\theta)$$

$$\sigma_{\beta(\theta)}^2 \cong \nabla_\theta \beta(\theta) \Sigma_{\theta\theta} \nabla_\theta \beta(\theta)^\top$$

$$\tilde{\beta} \cong \frac{\mu_{\tilde{G}(\theta, U)}}{\sigma_{\tilde{G}(\theta, U)}} = \frac{\mu_{\beta(\theta)}}{\sqrt{1 + \sigma_{\beta(\theta)}^2}}$$

Exemple #10.3 - Estimation prédictive FORM [📐]

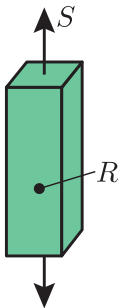
Soit $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln \mu_S}, \sigma_{\ln \mu_S}) \text{ kN} \\ \sigma_S \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln \sigma_S}, \sigma_{\ln \sigma_S}) \text{ kN} \end{cases}, \mu_S \perp \sigma_S$$

$$\mu_S \begin{cases} \mu_{\mu_S} = 15 \text{ kN} \\ \sigma_{\mu_S} = 5 \text{ kN} \end{cases}, \sigma_S \begin{cases} \mu_{\sigma_S} = 5 \text{ kN} \\ \sigma_{\sigma_S} = 2 \text{ kN} \end{cases}$$

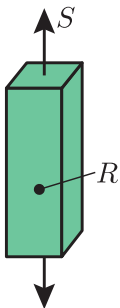
$$f_y = 0.3 \text{ kN/m}^2, D \perp S$$

$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$



$$\mathbf{M}_\theta = [15, 5] \text{ kN}, \quad \Sigma_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

Exemple #10.3 - Résultats [📄]



$$\nabla_{\theta}\beta(\theta) = [-0.10, -0.08]$$

$$\mu_{\beta(\theta)} \cong \beta(\mathbf{M}_{\theta}) = 1.39, \quad p_f(\mathbf{M}_{\theta}) = 0.083$$

$$\sigma_{\beta(\theta)}^2 \cong \nabla_{\theta}\beta(\theta)\Sigma_{\theta\theta}\nabla_{\theta}\beta(\theta)^{\top} = 0.54^2$$

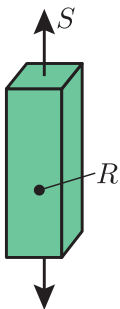
$$\tilde{\beta} \cong \frac{\mu_{\tilde{G}(\theta,U)}}{\sigma_{\tilde{G}(\theta,U)}} = \frac{\mu_{\beta(\theta)}}{\sqrt{1 + \sigma_{\beta(\theta)}^2}} = 1.22$$

$$\tilde{p}_f = \Phi(-\tilde{\beta}) = 0.11$$

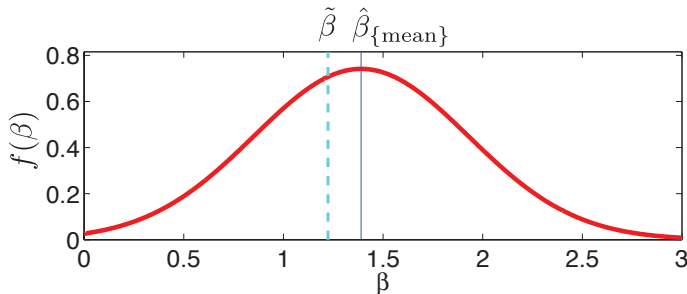
$$\tilde{p}_{f,MC} = 0.11 \quad (N = 10^4, \delta_{p_{f,MC}} = 0.03)$$

Exemple #10.3 - Résultats (cont.) [m][fig]

⚠ $\tilde{\beta} < \hat{\beta}_f$ et $\tilde{p}_f > \hat{p}_f$ car l'estimation ponctuelle néglige l'incertitude associée à θ

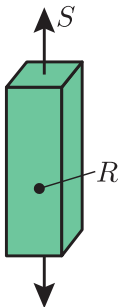


Representation de $f(\beta) \sim \mathcal{N}(\mu_{\beta(\theta)}, \sigma_{\beta(\theta)}^2)$

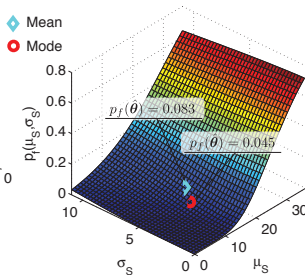
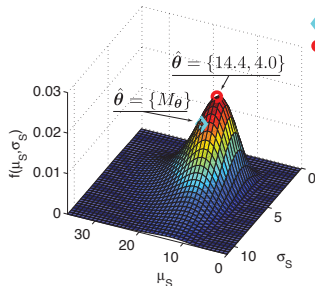


Exemple #10.3 - Résultats (cont.) [m][fig]

⚠ $\tilde{\beta} < \hat{\beta}_f$ et $\tilde{p}_f > \hat{p}_f$ car l'estimation ponctuelle néglige l'incertitude associée à θ



Representation de $f(\beta) \sim \mathcal{N}(\mu_{\beta}(\theta), \sigma_{\beta}^2(\theta))$





Plan de la section

intervalle, $\langle p_f \rangle_{1-\alpha}$

6.1 intervalles de confiance

6.2 Exemple

intervalles de confiance, $\langle p_f \rangle_{1-\alpha}$

Quelles sont les bornes les plus étroites
incluant une probabilité $1 - \alpha$?

$$\langle \beta \rangle_{1-\alpha} = [\beta_{\text{inf.}}, \beta_{\text{sup.}}]$$

$$\langle p_f \rangle_{1-\alpha} = [\Phi(-\beta_{\text{sup.}}), \Phi(-\beta_{\text{inf.}})]$$

si $\beta \sim \mathcal{N}(\mu_{\beta(\theta)}, \sigma_{\beta(\theta)}^2)$

$$\beta_{\text{inf.}} = \mu_{\beta(\theta)} + \Phi^{-1}(\alpha/2)\sigma_{\beta(\theta)}$$

$$\beta_{\text{sup.}} = \mu_{\beta(\theta)} + \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\sigma_{\beta(\theta)}$$

Exemple #10.4 - intervalles de confiance 📐

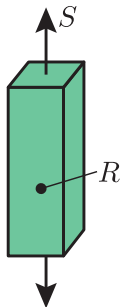
Soit $X_1 = D \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln D}, \sigma_{\ln D})$ et $X_2 = S \sim \text{Gum}(\mu_S, \beta_S)$ où:

$$D \begin{cases} \mu_D = 10 \text{ mm} \\ \sigma_D = 2 \text{ mm} \end{cases}, S \begin{cases} \mu_S \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln \mu_S}, \sigma_{\ln \mu_S}) \text{ kN} \\ \sigma_S \sim \ln \mathcal{N}(\mu_{\ln \sigma_S}, \sigma_{\ln \sigma_S}) \text{ kN} \end{cases}, \mu_S \perp \sigma_S$$

$$\mu_S \begin{cases} \mu_{\mu_S} = 15 \text{ kN} \\ \sigma_{\mu_S} = 5 \text{ kN} \end{cases}, \sigma_S \begin{cases} \mu_{\sigma_S} = 5 \text{ kN} \\ \sigma_{\sigma_S} = 2 \text{ kN} \end{cases}$$

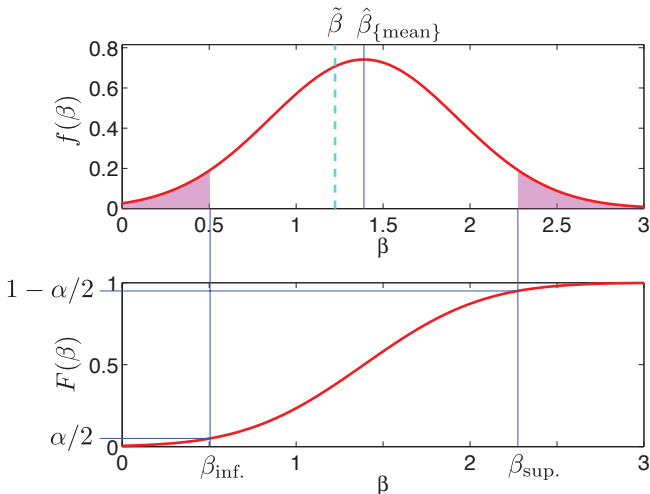
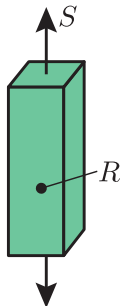
$$f_y = 0.3 \text{ kN/m}^2, D \perp S$$

$$R(\mathbf{X}) = D^2 f_y, g(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S$$



$$\mathbf{M}_\theta = [15, 5] \text{ kN}, \quad \Sigma_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

Exemple #10.3 - Résultats (cont.)



Résumé

Lorsque θ_f et θ_g sont eux même décrits par des variables aléatoires, les meilleures approches sont

- Estimation prédictive $\tilde{p}_f$: lorsque le résultat servira à la prise de décision.

$$\tilde{\beta} \cong \frac{\mu_{\tilde{G}(\theta, U)}}{\sigma_{\tilde{G}(\theta, U)}} = \frac{\mu_{\beta(\theta)}}{\sqrt{1 + \sigma_{\beta(\theta)}^2}}$$

- intervalle de confiance $\langle p_f \rangle_{1-\alpha}$: lorsque un niveau de confiance est prescrit (e.g. conception des centrales nucléaires).

$$\beta_{\text{inf.}} = \mu_{\beta(\theta)} + \Phi^{-1}(\alpha/2)\sigma_{\beta(\theta)}$$

$$\beta_{\text{sup.}} = \mu_{\beta(\theta)} + \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\sigma_{\beta(\theta)}$$



L'estimation ponctuelle néglige l'incertitude associé à θ

Comment estimer $f(\theta)$ à partir de mesures? → Module 11

*Théorie
probabilité*

- 0 Révision algèbre & probabilités 
- 1 Lois de probabilités 
- 3 PDF multivariés 

*Fiabilité des
structures
& systèmes*

- Introduction
- 2 Formulation fiabilité composantes $g_1(\mathbf{X})$ 
- 9 Formulation fiabilité systèmes 

*Estimation – p_f
échantillonnage*

- 4 Monte Carlo  
- 12 Échantillonnage par importance   

*Estimation – p_f
analytique*

- 5 FOSM   
- 6 FORM   
- 8 SORM   

*Utilisation des
résultats*

- 7 Analyse de sensibilité
- 10 Incertitudes aléatoires & épistémiques 
- 11 Données empiriques 
- 13 Prise de décision
- 14 Métamodèles & modèles empiriques