

Module #7

Déflexion des poutres : Calcul & poutres hyperstatiques

(CIV1150 - Résistance des matériaux)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal



Sections 7.1-7.4 – R. Craig (2011)
Mechanics of Materials, 3rd Edition
John Wiley & Sons.

P. Léger (2006)
Notes de cours: Chapitre 6, §7.1–7.7
Polytechnique Montréal.

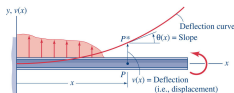
Objectifs

Chapitre 5 : diagrammes des efforts internes, $V(x)$ & $M(x)$

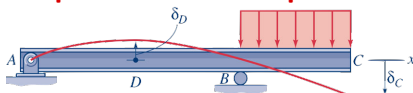
Chapitre 6 : contraintes dans les poutres, σ_x & τ_{xy}

Chapitre 7 : Déflexion dans les poutres, $v(x)$ & δ + poutres hyperstatiques

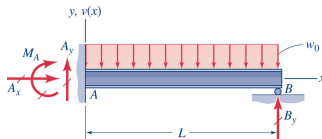
Courbe de déflexion : $v(x)$



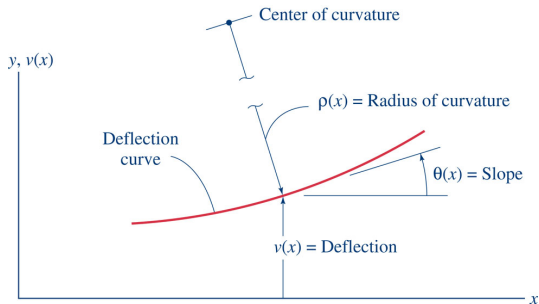
Déplacement en un point : δ



Poutres hyperstatiques, $R_a = ?$, $R_b = ?$

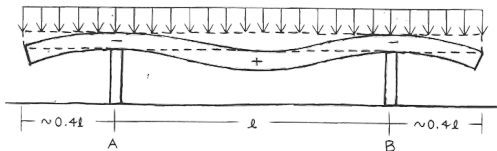


Définition des variables



- ▶ $\theta(x)$: pente ou rotation
- ▶ $v(x)$: déflexion ou déplacement
- ▶ $\rho(x)$: rayon de courbure

Structures en béton



⚠ Une déflexion excessive peut être le signe de problèmes

Pont en béton précontraint – Grand-mère



Conception gouvernée par la flèche - Lucerne, Suisse



Élancement : $L/h=36$

Déflexion & flèches → indicateurs de comportement

Les flèches excessives sont indésirables car :

- ⚠ causent des fissures dans les éléments non structuraux (e.g. murs, fenêtres)
- ⚠ causent un inconfort dû aux vibrations (e.g. centres commerciaux, aéroport)
- ⚠ causent des problèmes de fonctionnalité

Les codes de construction spécifient, une **flèche maximale**.

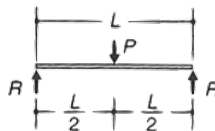
e.g. $L/360$ pour une poutre de plancher sous charge vive.

$$\text{Pont Lucerne} \rightarrow 80 \text{ m} \times 360 = 0.22 \text{ m}$$

Paramètres contrôlant les flèches

Les flèches sont principalement contrôlées par :

- ▶ le chargement (p, w)
- ▶ les conditions d'appui
- ▶ le module élastique du matériau (E)
- ▶ le moment d'inertie (I)
(**EI : rigidité flexionnelle**)
- ▶ la portée (L)
(pour P, E & I constants,
 $L \times 2 \rightarrow \delta \times 2^3 = \delta \times 8$)



Maximum deflection:

$$\Delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI}$$

[Schodek, 1998]

Comment calculer les flèches?

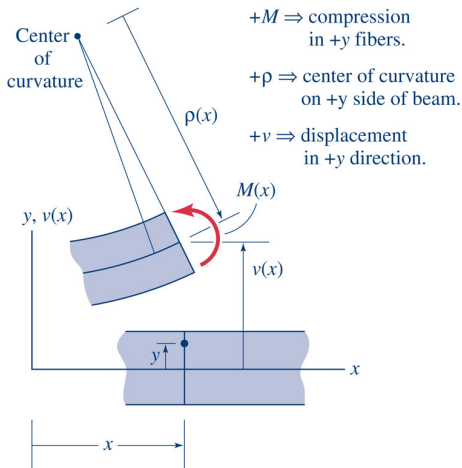
Dans le cadre de ce cours

1. Intégration des équations différentielles
2. Méthode de superposition

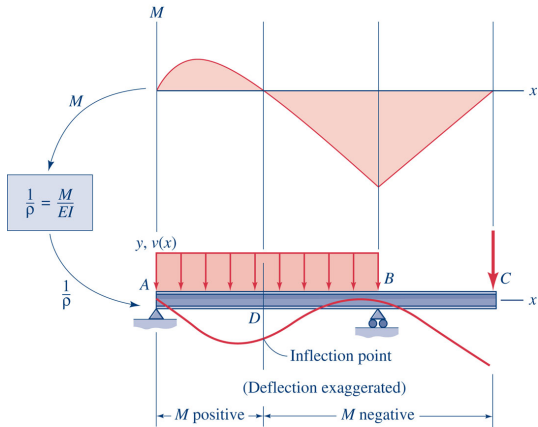
Autres méthodes

- ▶ Méthode des déplacements (Analyse des structures)
- ▶ Méthode des forces
- ▶ Méthode du travail virtuel (Éléments finis)
- ▶ ...

Signes et convention



Relation moment-courbure $M - \kappa$



$$M = \frac{EI}{\rho} = EI\kappa$$

courbure := $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

Points d'inflexion : $\rho = \infty$ donc $M = 0$

Relations déflexion-courbure $v - \kappa$

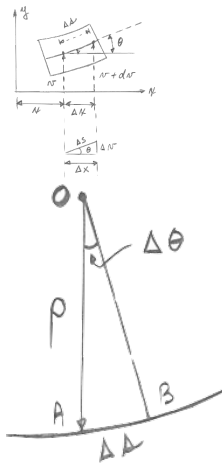
$$\theta \cong \tan \theta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Delta x = \Delta s \cos \theta \cong \Delta s$$

Lorsque la poutre fléchit, les normales aux points A et B se rencontrent en un point au **centre de courbure**

$$\Delta s = \rho \Delta \theta$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s, \Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{dx} \cong \frac{d^2 v}{dx^2}$$



Relation moment-courbure ($M - v$)

Relation courbure-moment ($1/\rho - M$)

$$\text{courbure} := \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Relations courbure-déflexion ($1/\rho - v$)

$$\text{courbure} := \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}}$$

Relation moment-courbure ($M - v$)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\boxed{EIv'' = M}, \quad \text{où } v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$$

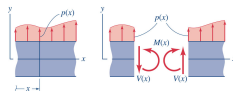
Relation efforts-déflexions ($V(x) - v(x)$ & $p(x) - v(x)$)

Rappel : $p(x) - V(x) - M(x)$

$$M'(x) = V(x)$$

$$V'(x) = p(x)$$

Rappel : convention de signes (+) 



Relation cisaillement-déformation

$$M(x)' = (Elv(x)'')' = Elv(x)''' = V(x)$$

Relation charge distribuée-déformation

$$V(x)' = (Elv(x)'')'' = Elv(x)'''' = p(x)$$

Méthode de double intégration (ordre 2)

Utile lorsqu'on peut facilement **formuler** $M(x)$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = v(x)'' = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) = v(x)' = \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx + C_1$$

$$v(x) = \int_0^x \theta(x) dx = \int_0^x v(x)' dx = \int \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_1 x + C_2$$

Les constantes C_1 & C_2 sont calculées à partir des
conditions d'appui et de continuité

Méthode de quadruple intégration (ordre 4)

Utile lorsqu'on peut facilement **formuler** $p(x)$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = v(x)'''' = \frac{p}{EI}$$

$$v(x) = \int \int \int \int \frac{p(x)}{EI} dx + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Les constantes $C_1 - C_4$ sont calculées à partir des **conditions d'appuis et de continuité**

Procédure : calculer la déflexion de poutres isostatiques

1. Tracer le profil de déflexion anticipé
2. Identifier les discontinuités : appuis & charges
3. Tracer le DCL du moment pour chaque tronçon (discontinuités)
4. Formuler $M(x)$ ou $p(x)$ pour chaque tronçon
5. Intégrer:

$$v(x) = \int \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_1 x + C_2 \text{ (ordre 2)}$$

$$v(x) = \int \int \int \int \frac{p(x)}{EI} dx + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \text{ (ordre 4)}$$

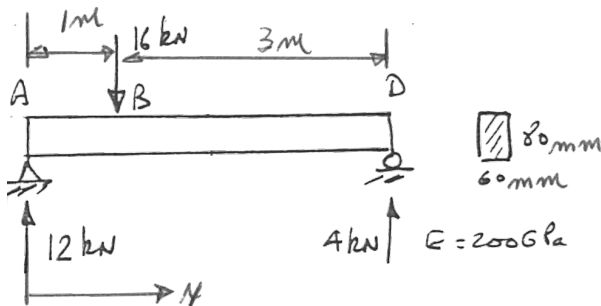
6. Identifier les constantes C_i à partir des conditions d'appui et de continuité
7. Calculer le déplacement pour des coordonnées spécifiques x

Conditions d'appui et de continuité

TABLE 7.1 Boundary Conditions

	Type	Symbol*	2nd Order	4th Order
BC	Fixed end		$v = 0$ $v' = 0$	$v = 0$ $v' = 0$
	Simple support		$v = 0$	$v = 0$ $M = 0$
	Free end		No BC	$V = 0$ $M = 0$
	Concentrated force		No BC	$V = P_0$ $M = 0$
	Concentrated couple		No BC	$V = 0$ $M = -M_0$
*These boundary conditions also apply if the boundary under consideration is the other end of the beam (i.e., $x = L$).				

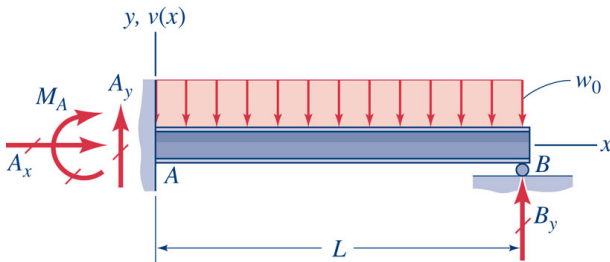
Exemple 7.1



Question:

- Calculer l'équation de la déformée $v(x)$
- Calculer la flèche sous la charge
- Calculer la flèche maximale

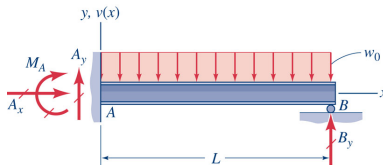
Poutres hyperstatiques



3 réactions inconnues (A_y , $\overset{=0}{A_x}$, M_A , B_y) et seulement 2 éq. d'équilibre ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_z = 0$)

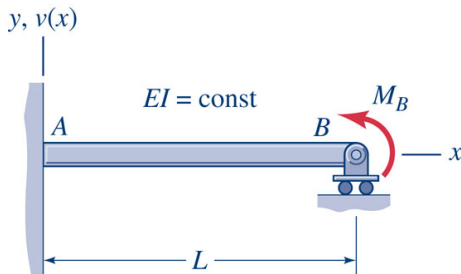
L'équation manquante doit être formulée à l'aide des conditions d'appui et de continuité

Poutres hyperstatiques - méthode



1. Identifier une des réactions comme *surabondante* R^* ; soit A_y, M_A , ou B_y
2. Formuler $M(x) = f(R^*)$
3. Intégrer $Elv'' = M(x)$ et déterminer R^* , C_1 et C_2 à partir des conditions d'appui et de continuité

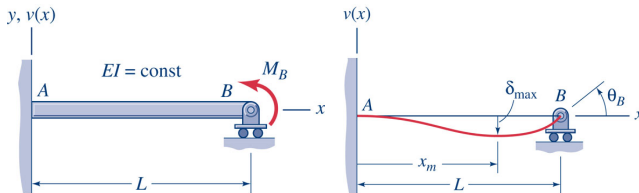
Poutres hyperstatiques - exemple



Question : déterminer l'expression décrivant la déformation $v(x)$

Poutres hyperstatiques - exemple

Étape 1 : tracer le profil de déflexion anticipé

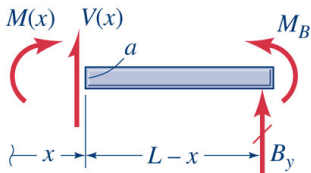


Étape 2 : identifier les discontinuités & l'effort surabondant

B_y sera considéré comme surabondant

Poutres hyperstatiques - exemple

Étape 3 : tracer le DCL



Étape 4 : formuler $M(x)$

$$\sum M_{z|a} = 0 \rightarrow M(x) = M_B + B_y(L - x) = EIv''$$

Poutres hyperstatiques - exemple

Étape 5 : intégrer $M(x)$

$$M(x) = Elv'' = M_B + B_y(L - x)$$

$$Elv' = \int M_B + B_y(L - x)dx = M_Bx + B_yLx - B_y\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$Elv = \int Elv'dx = M_B\frac{x^2}{2} + B_yL\frac{x^2}{2} - B_y\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

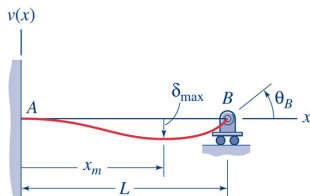
3 inconnus : B_y , C_1 & C_2

Poutres hyperstatiques - exemple

Étape 6 : identifier les conditions d'appui et évaluer les inconnus

Conditions d'appuis

1. $v'(0) = 0$
2. $v(0) = 0$
3. $v(L) = 0$



Évaluation des inconnus

1. $Elv'(0) = C_1 = 0$
2. $Elv(0) = C_2 = 0$
3. $Elv(L) = M_B \frac{L^2}{2} - B_y \frac{L^3}{3} = 0$

$$\rightarrow B_y = -\frac{3}{2} \frac{M_B}{L}$$

$$Elv' = M_B x + B_y Lx - B_y \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$Elv = M_B \frac{x^2}{2} + B_y L \frac{x^2}{2} - B_y \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$v(x) = \frac{M_B L^2}{4EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Cas génériques

E.1. Deflections and Slopes of Cantilever Uniform Beams* (continued)

5


$$v = \frac{p_0 x^4}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$$
$$v' = \frac{p_0 x^3}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2)$$
$$\theta_B = \frac{p_0 L^3}{6EI} \quad \theta_R = \frac{p_0 L^3}{6EI}$$

6


$$v = \frac{p_0 x^4}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$
$$v' = \frac{p_0 x^3}{6EI} (3a^2 - 3ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$
$$v = \frac{p_0 a^4}{24EI} (4x - a) \quad v' = \frac{p_0 a^3}{6EI} \quad a \leq x \leq L$$
$$\theta_B = \frac{p_0 a^3}{24EI} (4L - a) \quad \theta_R = \frac{p_0 a^3}{6EI}$$

7


$$v = \frac{p_0 x^5}{120LEI} (20L^2 - 10Lx^2 + x^3)$$
$$v' = \frac{p_0 x^4}{24LEI} (16L^2 - 6Lx^2 + x^3)$$
$$\theta_B = \frac{11p_0 L^4}{120EI} \quad \theta_R = \frac{p_0 L^3}{6EI}$$

8


$$v = \frac{p_0 x^5}{120LEI} (10L^2 - 90L^2 x + 5Lx^2 - x^3)$$
$$v' = \frac{p_0 x^4}{24LEI} (4L^2 - 6L^2 x + 4Lx^2 - x^3)$$
$$\theta_B = \frac{p_0 L^4}{30EI} \quad \theta_R = \frac{p_0 L^3}{24EI}$$

9


$$v = \frac{p_0 L^4}{3\pi^2 EI} \left(48L^2 \cos \frac{\pi x}{2L} - 48L^2 + 3\pi^2 Lx^2 - \pi^2 x^4 \right)$$
$$v' = \frac{p_0 L^3}{\pi^2 EI} (2\pi^2 Lx - \pi^2 x^2 - 8L^2 \sin \frac{\pi x}{2L})$$
$$\theta_B = \frac{7p_0 L^3}{3\pi^2 EI} (\pi^2 - 24) \quad \theta_R = \frac{p_0 L^3}{\pi^2 EI} (\pi^2 - 8)$$

*Beam-deflection theory is covered in Chapter 7. The sign convention used here is the same as in Chapter 7.

E.2. Deflections and Slopes of Simply-Supported Uniform Beams*

Notation



$v(x)$ = deflection in the y direction
 $v'(x)$ = slope of the deflection curve
 $\theta_A = v'(0)$ = slope (angle) at end A
 $\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at end B
 x_m = distance from end A to the point of maximum deflection
 $\delta_x = |v(L/2)|$ = deflection at the center of the beam
 $\delta_{max} = \max(v(x))$ = maximum deflection

1


$$v = \frac{M_0 x}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$
$$v' = \frac{M_0}{6EI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$
$$\theta_A = \frac{M_0 L}{6EI} \quad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$
$$x_m = L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ and } \delta_{max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

2


$$v = \frac{-M_0 x}{6LEI} (3a^2 - 3a^2 x - 2L^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$
$$v' = \frac{-M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$
$$\theta_A = \frac{-M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2) \quad \theta_B = \frac{-M_0}{6LEI} (3a^2 - L^2)$$

3

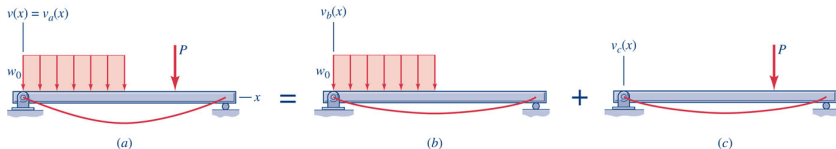

$$v = \frac{P x}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$
$$v' = \frac{P}{36EI} (3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$
$$\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{48EI} \quad \theta_R = \theta_L = \frac{PL^2}{48EI}$$

4


$$v = \frac{Pb}{48EI} (L^2 - b^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$
$$v' = \frac{Pb}{6EI} (L^2 - b^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$
$$\theta_A = \frac{Pb(L+b)}{48EI}$$
$$\theta_B = \frac{Pb(L-a)}{48EI}$$
$$\text{If } a \geq b, x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \text{ and } \delta_{max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$$

(continued)

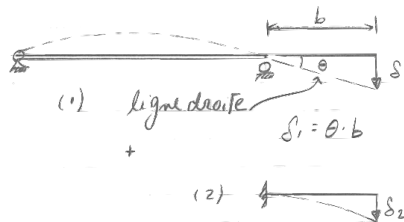
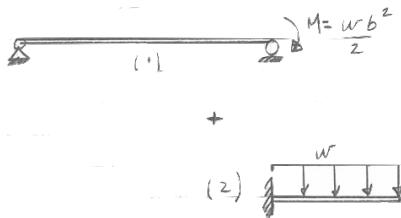
Principe de superposition : poutres isostatiques



hypothèses:

1. Comportement linéaire ($\sigma = \epsilon E$)
2. Comportement élastique
3. Petits déplacements & déformations par rapport aux dimensions de la structure

L'effet de plusieurs charges sur une structure peut être obtenu par superposition

Exemple isostatique - calculer la flèche δ 

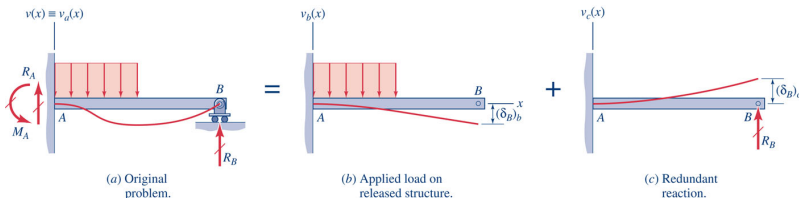
$$\theta = \frac{Ma}{3EI} = \frac{wb^2}{2} \frac{a}{3EI} \quad (\text{E-2, cas 1})$$

$$\delta_1 = \theta \cdot b = \frac{wab^4}{6EI}$$

$$\delta_2 = \frac{wb^4}{8EI} \quad (\text{E-1, cas 5})$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{wb^3}{2EI} \left[\frac{b}{4} + \frac{a}{3} \right]$$

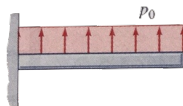
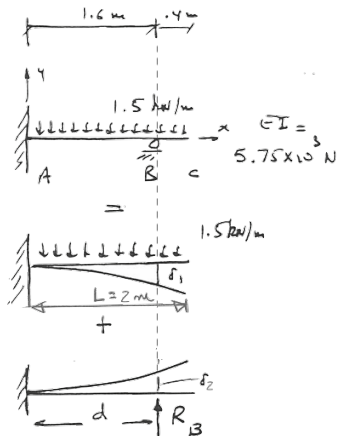
Principe de superposition : poutres hyperstatiques



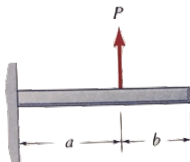
Méthode:

1. Rendre le système isostatique → **éliminer une réaction surabondante R^***
2. Calculer la flèche en fonction de la réaction surabondante, $v(x) = f(R^*)$
3. Calculer R^* en combinant $v(x)$ et les conditions de compatibilité des déplacements

Exemple 7.2



$$v = \frac{p_0 x^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$$



$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI} (3x - a) \quad a \leq x \leq L$$

Question: Calculer R_B , δ_C et diagrammes de V & M

Résumé – Module #7

But : Calculer la déflexion des poutres + réaction (Hyperstatique)

Relation $\kappa - M$:

$$\kappa = \frac{M}{EI} = \frac{d^2 v}{dx^2} = v''$$

∫ Poutres iso- et hyperstatiques

Ordre 2 – lorsqu'on peut **formuler** $M(x)$

Relation moment-déformation :

$$v = \int_0^x \theta(x) dx = \int_0^x v' dx = \int \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_1 x + C_2$$

$$EI v'' = M$$

Ordre 4 – lorsqu'on peut **formuler** $p(x)$

Relation cisaillement-déformation :

$$(EI v'')' = EI v''' = V$$

$$v = \int \int \int \int \frac{p(x)}{EI} dx + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Relation charge
distribuée-déformation :

$$(EI v'')'' = EI v'''' = p$$

Méthode de superposition: résoudre des cas complexes en superposant des cas simples

Organisation de la matière

1 Statique	- Équilibre des forces et moments - Diagrammes de corps libres  - 5 Diagramme des efforts, $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$
2 Matériau	- Contraintes & déformations - Loi de Hooke, Poisson & St-Venant 
Chargements	- 3 Efforts axiaux  - 4 Torsion  - 6a Flexion  - 6b Cisaillement  - 7 Déflexion  - 9 Pression & chargements combinés 
États limites	- 7 Déflexion  - 8 Contraintes 2D-3D  - 10 Lois constitutives & critères de rupture 