

Module #6b

Contraintes de cisaillement dans les poutres

(CIV1150 - Résistance des matériaux)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
Polytechnique Montréal



Sections 6.8-6.12 – R. Craig (2011)
Mechanics of Materials, 3rd Edition
John Wiley & Sons.

P. Léger (2006)
Notes de cours: Chapitre 6
Polytechnique Montréal.

Objectifs

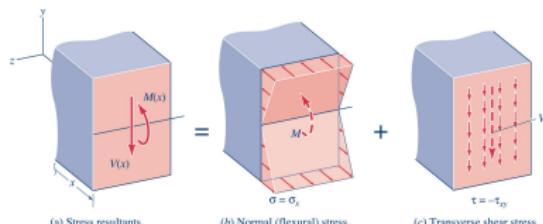
Chapitre 5: Diagrammes des efforts internes

- ▶ Efforts tranchants – $V(x)$
- ▶ Moments fléchissants – $M(x)$

Chapitre 6, partie a: Contraintes de flexion dans les poutres

Chapitre 6, partie b: Contraintes de cisaillement dans les poutres

Connaissant $M(x)$ et $V(x)$, → distribution des contraintes de cisaillement au droit des sections/longitudinales?

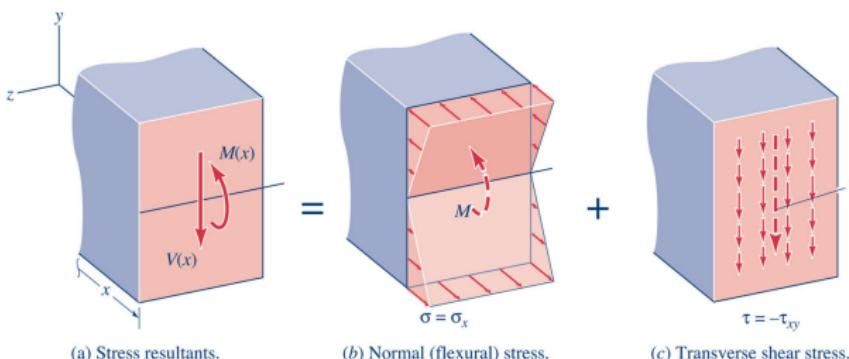


τ_{xy} : rappel des notions de base

Contraintes de flexion et d'efforts tranchants

Les contraintes longitudinales de flexion \perp effort tranchant V

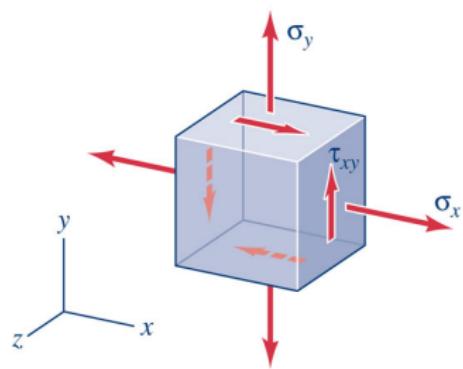
$$\sigma_x = \frac{-M_z \cdot y}{I_z}$$



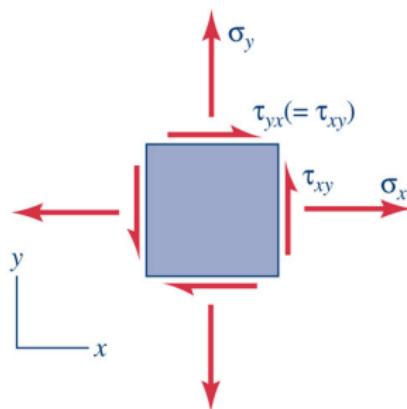
Nous nous intéressons au calcul de la contrainte de cisaillement: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

τ_{xy} : rappel des notions de base

Rappel module 2: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$



(a) Three-dimensional view.



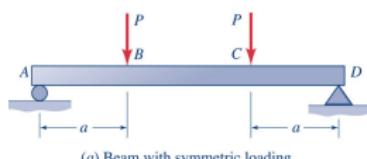
(b) Two-dimensional view.

Afin de satisfaire les éq. d'équilibre: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

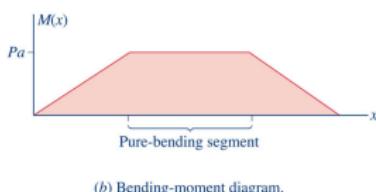
Flexion pure v.s. flexion ordinaire

Contraintes τ_{xy} et flexion

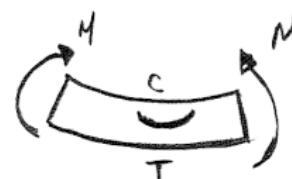
Flexion pure, $V(x) \equiv 0 \rightarrow$ pas de contraintes de cisaillement



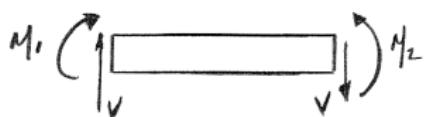
(a) Beam with symmetric loading.



(b) Bending-moment diagram.



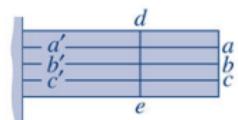
Flexion ordinaire, $V(x) \neq 0, M_1 \neq M_2$



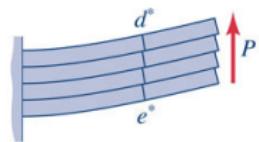
Des efforts tranchants / contraintes de cisaillement sont nécessaire afin de rétablir l'équilibre τ_{xy}

Déformation des sections sous flexion ordinaire

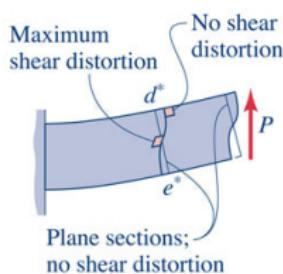
Déformation des sections sous flexion ordinaire



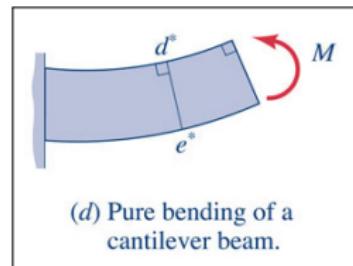
(a) A beam made of separate "planks."



(b) Slip between non-bonded "planks."



(c) Shear deformation of a uniform beam (or bonded-layer beam).



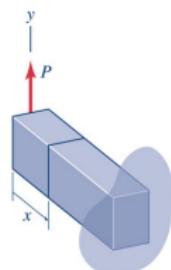
(d) Pure bending of a cantilever beam.

Efforts tranchants → les sections ne demeurent pas planes

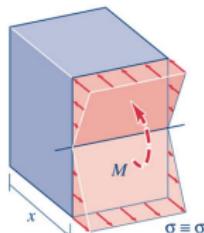
τ_{xy}, τ_{yx} et équilibre d'une section

Contraintes τ_{xy}, τ_{yx} et équilibre d'une section

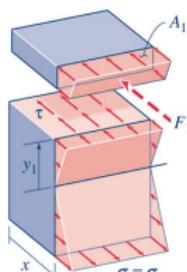
Flexion ordinaire, $V(x) \neq 0, M(x) \neq 0$



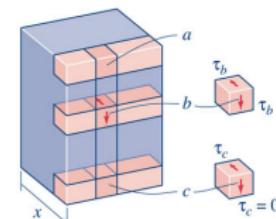
(a) A cantilever beam.



(b) Flexural-stress distribution (linearly elastic).



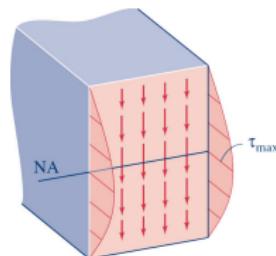
(c) Unbalanced flexural stresses lead to shear stresses on a longitudinal section.



(d) Transverse and longitudinal shear stresses.

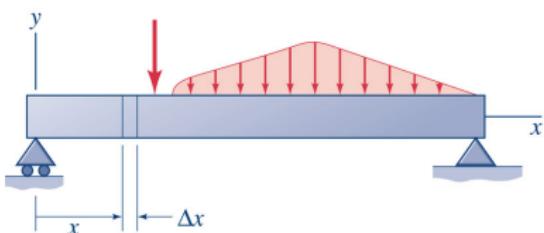
Les contraintes $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ont une distribution parabolique par rapport à y

$$\tau_{xy}(y) = \tau_{yx}(y) \propto y^2$$

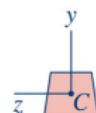


τ_{xy} et équilibre d'une section

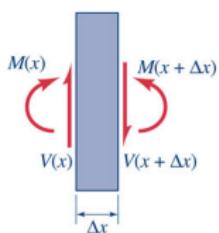
Contraintes τ_{xy} et équilibre d'une section (introduction)



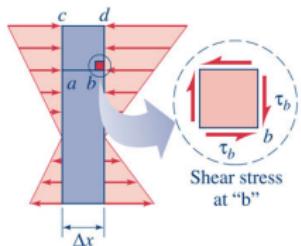
(a) Profile view.



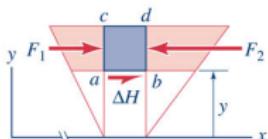
(b) Cross section.



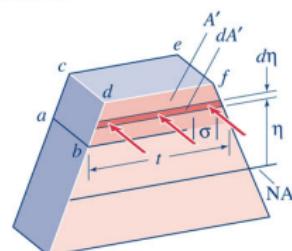
(a) An element of length Δx .



(b) The distribution of flexural stress.



(c) A free body diagram (minus vertical shear on ac and bd).

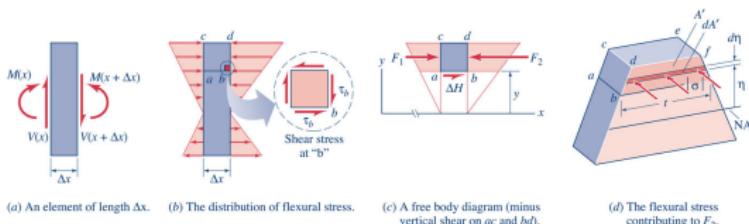


(d) The flexural stress contributing to F_2 .

$$\Delta H = F_2 - F_1$$

τ_{xy} et équilibre d'une section

Contraintes $\tau_{xy}(y)$ et équilibre d'une section (formulation)



Flux de cisaillement [$q = \text{force}/\text{longueur}$]:

$$q(y) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_2 - F_1}{\Delta x}$$

$$F_1 = \int_{A'} |\sigma(x, \eta)| dA = \frac{M(x)}{I_z} \int_{A'} \eta dA$$

$$F_2 = \int_{A'} |\sigma(x + \Delta x, \eta)| dA = \frac{M(x + \Delta x)}{I_z} \int_{A'} \eta dA$$

$$q(y) = \frac{V \cdot Q(y)}{I_z}$$

$$\int_{A'} \eta dA = A' \bar{y}' = Q(y) : \text{1er moment d'aire}$$

$$q(y) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} \right]}_{V = \frac{dM}{dx}} \frac{Q(y)}{I_z} = \frac{V \cdot Q(y)}{I_z}$$

$$\tau_{xy}(y) = \frac{q(y)}{t} = \frac{V \cdot Q(y)}{I_z \cdot t(y)}$$

Propriétés des sections

Flexion \rightarrow Second moment d'aire, I_z (Moment d'inertie)

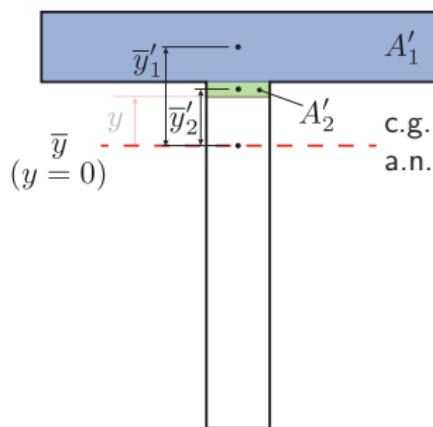
$$I_z = \sum [I_i + A_i d_i^2], \quad [mm^4]$$

Cisaillement \rightarrow **Premier moment d'aire, $Q(y)$**

$$Q(y) = \sum A'_i \bar{y}'_i, \quad [mm^3]$$

Calcul du 1^{er} moment d'aire, $Q(y)$

Premier moment d'aire – $Q(y)$



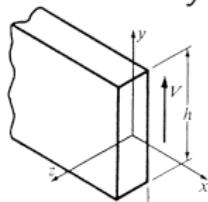
1. Calculer le C.G. & A.N.
2. Isoler l'aire A' au dessus de y
(en dessous pour $y < 0$)
3. Décomposer A' en éléments simples d'aire A'_i et ayant un C.G. \bar{y}'_i
4. Calculer le premier moment d'aire de la section

\bar{y}'_i : distance entre le C.G. de la section et celui de l'élément i

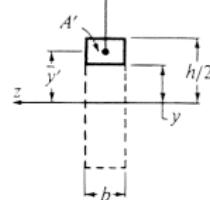
$$Q(y) = \sum Q_i(y) = \sum A'_i \bar{y}'_i$$

$\tau_{xy}(y)$ pour une section prismatique

Calcul de τ_{xy} pour une section prismatique

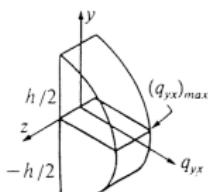


$$Q(y) = A'\bar{y}' = \underbrace{b\left(\frac{h}{2} - y\right)}_{A'} \underbrace{\left(\frac{h}{2} + y\right)}_{\bar{y}'} / 2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y) &= \frac{VQ(y)}{I_z b} &= V \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{1}{b} \frac{12}{bh^3} \\ &= \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned}$$

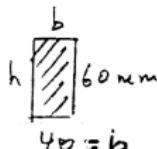
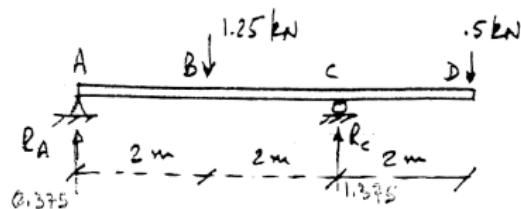
$$\tau_{xy}(y = h/2) = 0$$



$$\tau_{xy}(y = 0) = \tau_{xy,\max} = \frac{6V}{4bh} = \boxed{\frac{\frac{3}{2} \frac{V}{bh}}{\tau_{xy,\text{moy.}}}} = \frac{q_{\max}}{b}$$

 bh^3

[Bazergui, 2000]

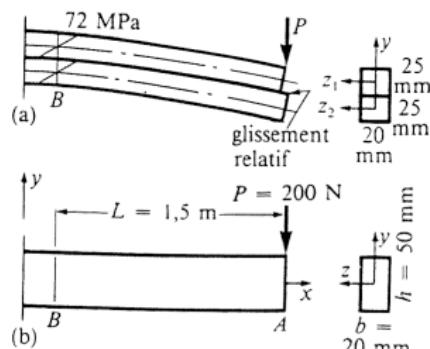
Exemple – Calcul de τ_{xy} Exemple – Calcul de τ_{xy}  

- $V_{\max} = -0.875 \text{ kN}$
- $I_z = 720 \times 10^{-9} \text{ m}^4$
- $b = 0.04 \text{ m}$

$$\tau_{xy,\max} = \frac{V_{\max} \cdot Q_{\max}}{I_z \cdot b} = ?$$

Exemple – Glissement relatif

Exemple – Glissement relatif



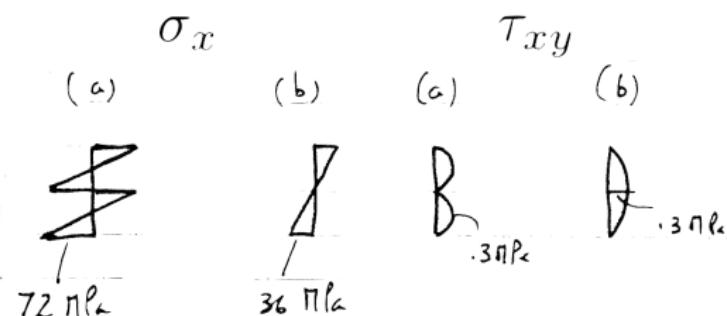
$$d = 4 \text{ mm} \rightarrow A = 12.6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{\text{adm.}} = 75 \text{ MPa}$$



#/m =?

$$\rightarrow n = 7 \text{ clous/m}$$



Combien de clous par mètre pour que
(a) \rightarrow (b)?

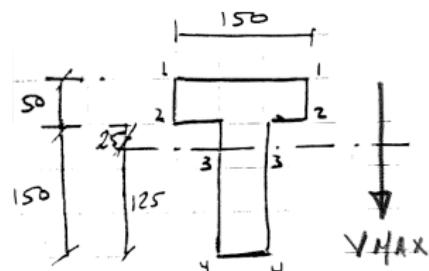
$$1 \text{ clou: } V_{\text{adm.}} \leq \tau_{\text{adm.}} \cdot A = 945 \text{ N}$$

$$q_{\text{max}} = 6000 \text{ N/m} \rightarrow n \geq \frac{6000 \text{ N/m}}{945 \text{ N}} = 6.3$$

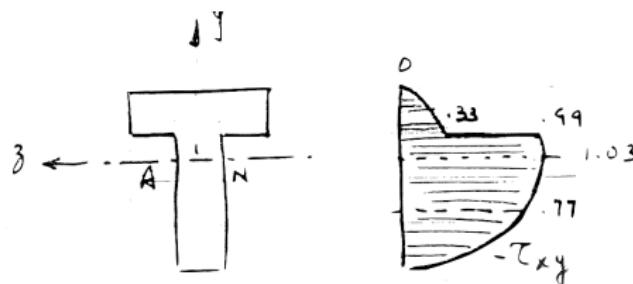
[Bazergui, 2000]

Exemple – Section non-constante (compacte)

Exemple – Section non-constante (compacte)

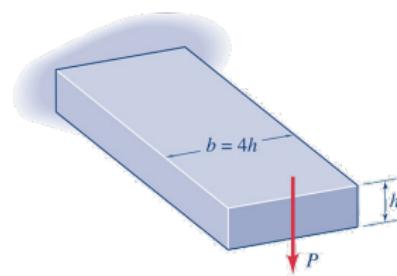


- $V_{\max} = 7000 \text{ N}$
- $I_z = 53.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$
- $\tau_{xy}(y) = ?$

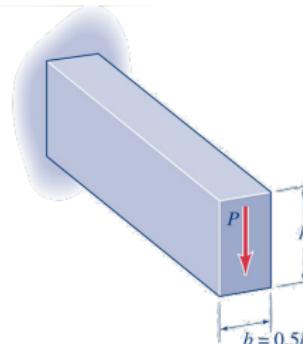


$$\tau_{xy,\max} = 1.03 \text{ MPa}$$

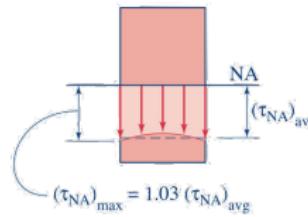
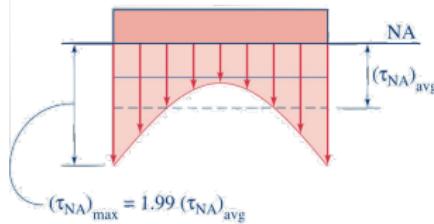
[Bazergui, 2000]

Forme des sections: h/b Forme des sections: h/b 

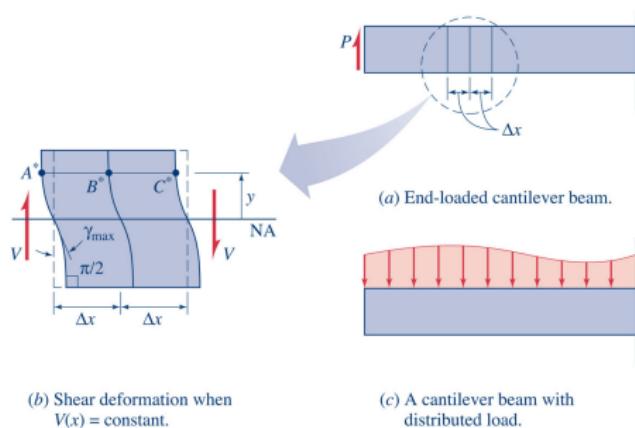
(a) A “wide beam,” or plate.



(b) A “narrow beam.”



La méthode de calcul de τ_{xy} n'est pas applicable pour les sections de faible hauteur, e.g. $h < 2b$

Forme des sections: h/L Forme des sections: h/L 

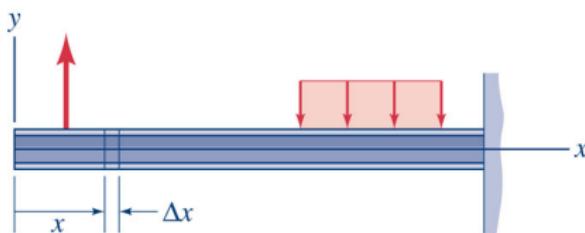
Efforts tranchants → les sections ne demeurent pas planes

Effort tranchant constant (a): l'effet est de τ_{yx} sur σ_x est nul

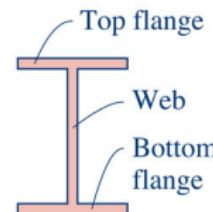
Effort tranchant variable (c): l'effet est de τ_{yx} sur σ_x est négligeable ($\leq 3\%$) pour les poutres élancées: $L/h \geq 4$

τ_{xy} sections en I

Poutres en I



(a) Profile view.



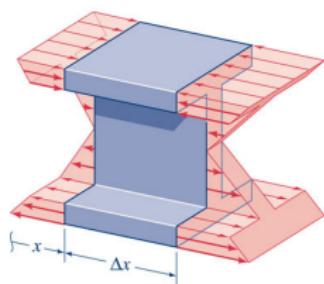
(b) Cross section.

Dans les cas communs, l'âme de la poutre reprend
 $> 90\%$ de l'effort tranchant

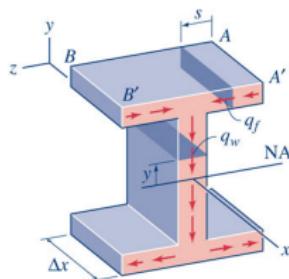
Comment calculer la contrainte de cisaillement dans les ailes?

τ_{xy} sections en I

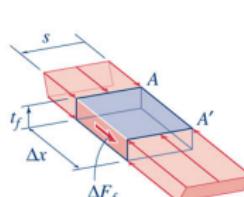
Poutres en I - équilibre des sections



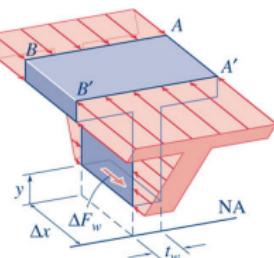
(a) A beam segment showing flexural stresses due to $M(x)$ and due to $M(x + \Delta x)$.



(b) Cutting planes used to determine the flange shear flow q_f and the web shear flow q_w .



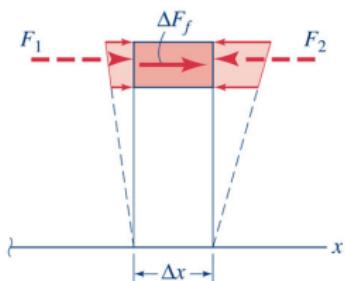
(c) A free-body diagram for determining flange shear flow.



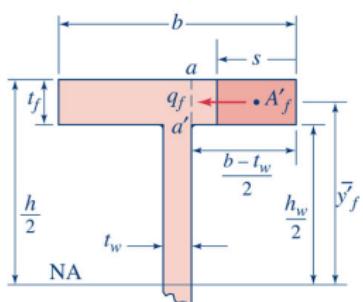
(d) A free-body diagram for determining web shear flow.

τ_{xy} sections en I

Poutres en I - cisaillement dans les ailes: q_f & τ_f



(a) Profile view of flange free-body diagram.



(b) The area on which the unbalanced flexural stresses act.

$$q_f = \frac{VQ_f}{t_f}$$

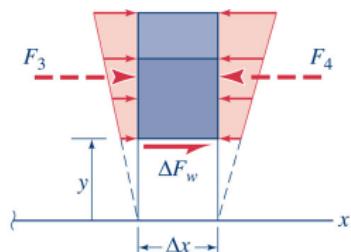
$$Q_f = A'_f \bar{y}'_f$$

$$\begin{aligned} \tau_f &= \frac{q_f}{t_f} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{V \cdot s}{t_f} \frac{h^2 - h_w^2}{bh^3 - bh_w^3 + t_w h_w^3} \end{aligned}$$

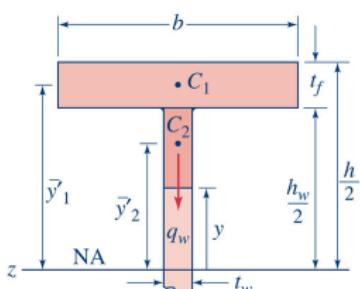
La contrainte de cisaillement (aile) est proportionnelle à la distance s : $\tau_f \propto s$

τ_{xy} sections en I

Poutres en I - cisaillement dans l'ame: q_w & τ_w



(a) Profile view of web-flange free-body diagram.



(b) The area used to compute shear flow in the web.

$$q_w = \frac{VQ_w}{I_z}$$

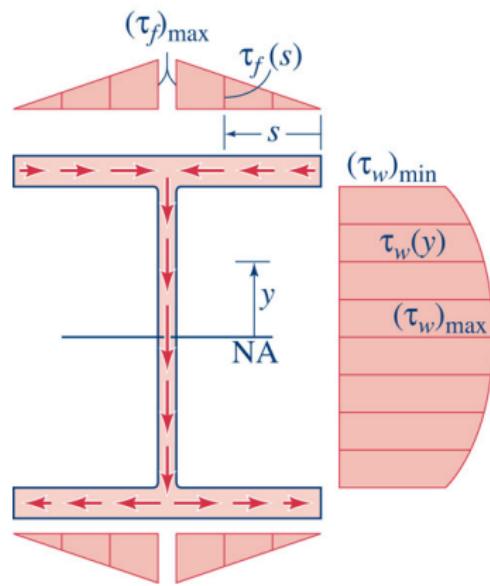
$$Q_w = A'_w \bar{y}'_w = A'_1 \bar{y}'_1 + A'_2 \bar{y}'_2$$

$$\begin{aligned} \tau_w &= \frac{q_w}{t_w} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{t_w} \frac{bh^2 - bh_w^2 + t_w h_w^2 - 4t_w y^2}{bh^3 - bh_w^3 + t_w h_w^3} \end{aligned}$$

La contrainte de cisaillement (ame) est parabolique: $\tau_w \propto y^2$

τ_{xy} sections en I

Poutres en I - q_f & τ_f



Dans les ailes

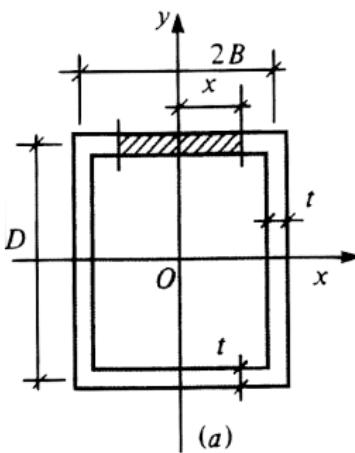
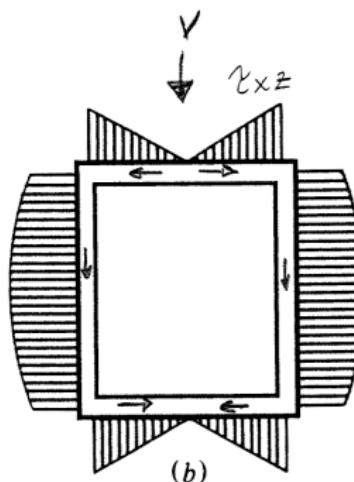
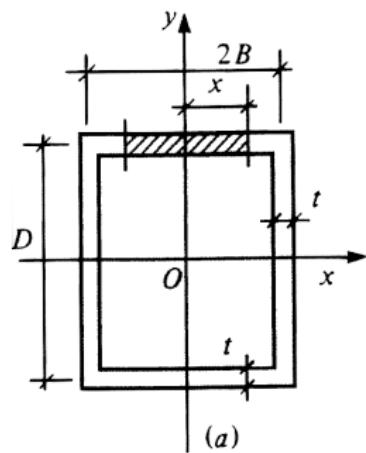
$$\tau_{xy} \approx 0, \quad \tau_{xz} \neq 0$$

Dans l'ame

$$\tau_{xz} \approx 0, \quad \tau_{xy} \neq 0$$

τ_{xy} sections fermées symétriques

Sections fermées symétriques - q_f & τ_f

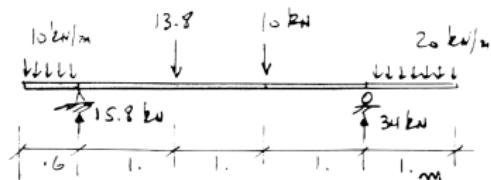


Due à la symétrie, il n'y a pas de contraintes τ_{xz} dans le plan de chargement (changement de signe au droit du plan)

[Heyman, 1998]

τ_{xy} sections fermées symétriques

Exemple – Choix d'une section



Choisir une section de type W:

- ▶ $\sigma_x \leq 40 \text{ MPa}$
- ▶ $\tau \leq 20 \text{ MPa}$

Plan:

1. Évaluer $V(x)$ & $M(x)$
2. Choisir une section tel que $\sigma_x \leq 40 \text{ MPa}$
3. On vérifie que $\tau \leq 20 \text{ MPa}$

τ_{xy} sections fermées symétriques

Exemple – Choix d'une section (cont.)

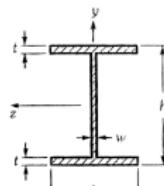


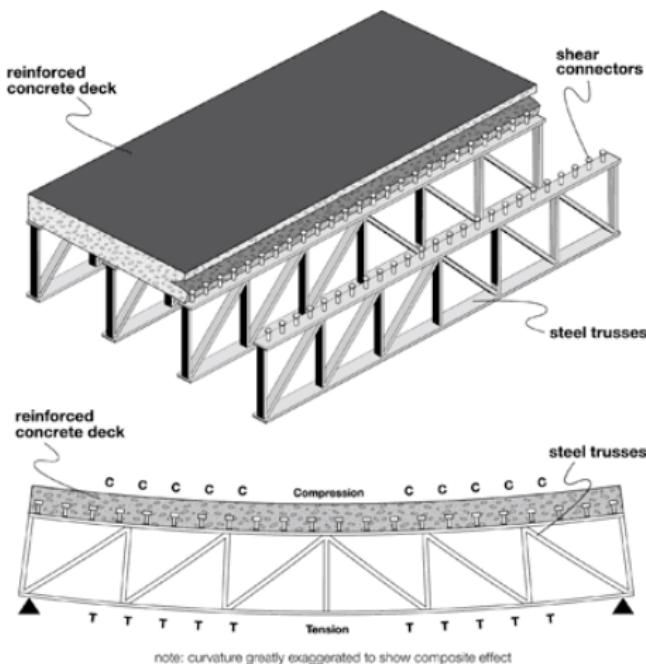
Tableau C.1 (suite) Profilés en I du type W

Appellation	m	A	Axe des z				Axe des y				J	C _w	Dimensions			
			I_z	S_z	r_z	Z_z	I_y	S_y	r_y	Z_y			h	b	t	w
	kg/m	mm^2	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^3 mm^3	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^3 mm^3	10^3 mm^4	10^9 mm^6	mm	mm	mm	mm
W250																
× 167	167	21 300	300	2 080	119	2 430	98,8	746	68,1	1 140	6 310	1 630	289	265	31,8	19,2
× 149	149	19 000	259	1 840	117	2 130	86,2	656	67,4	1 000	4 510	1 390	282	263	28,4	17,3
× 131	131	16 700	221	1 610	115	1 850	74,5	571	66,8	870	3 120	1 160	275	261	25,1	15,4
× 115	115	14 600	189	1 410	114	1 600	64,1	495	66,2	753	2 130	976	269	259	22,1	13,5
× 101	101	12 900	164	1 240	113	1 400	55,5	432	65,6	656	1 490	829	264	257	19,6	11,9
× 89	89	11 400	143	1 100	112	1 230	48,4	378	65,1	574	1 040	713	260	256	17,3	10,7
W200																
× 100	100	12 600	113	987	94,6	1 150	36,6	349	53,8	533	2 060	386	229	210	23,7	14,5
× 86	86	11 000	94,4	851	92,6	978	31,4	300	53,4	458	1 370	318	222	209	20,6	13,0
× 71	71	9 070	76,3	707	91,7	800	25,4	246	52,9	374	801	250	216	206	17,4	10,2
× 59	59	7 530	60,9	580	89,9	650	20,4	199	52,1	302	452	196	210	205	14,2	9,1
× 52	52	6 620	52,5	509	89,0	566	17,8	175	51,9	265	314	167	206	204	12,6	7,9
× 46	46	5 820	45,2	445	88,1	492	15,3	151	51,3	229	213	141	203	203	11,0	7,2
W150																
→ × 37	37	4 730	22,2	274	68,5	310	7,07	91,8	38,7	140	192	40,0	162	154	11,6	8,1
× 30	30	3 790	17,1	218	67,3	244	5,56	72,6	38,3	111	100	30,3	157	153	9,3	6,6
× 22	22	2 840	12,0	159	65,1	176	3,87	50,9	36,9	77,5	41,5	20,4	152	152	6,6	5,8

[Bazergui, 2000]

Introduction aux poutres assemblées

Poutre composites acier-béton

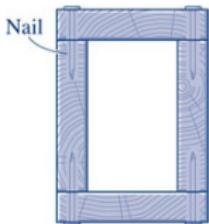


note: curvature greatly exaggerated to show composite effect

Efforts dans les assemblages



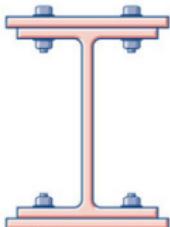
(a) A glued, laminated wood beam.



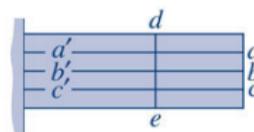
(c) A wood box beam.



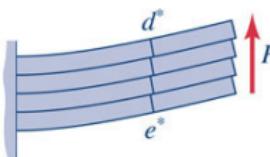
(b) A welded steel plate girder.



(d) A reinforced steel beam.



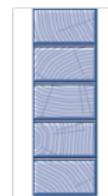
(a) A beam made of separate "planks."



(b) Slip between non-bonded "planks."

Les assemblages sont conçus par rapport aux efforts de cisaillement

Types d'assemblages communs



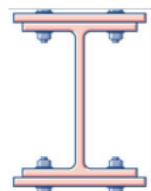
- ▶ **Assemblages collés:** l'effort de cisaillement est distribué sur la surface collée

$$\tau = \frac{VQ}{I_z t_{\text{collé}}} \leq \tau_{\text{adm., colle}}$$



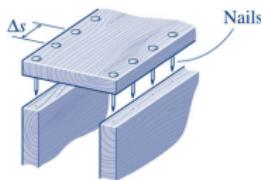
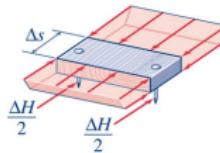
- ▶ **Assembles soudés:** l'effort de cisaillement est distribué le long du cordon de soudure

$$q = \frac{VQ}{I_z} \leq q_{\text{adm., soudure}} \text{ [force/longueur]}$$

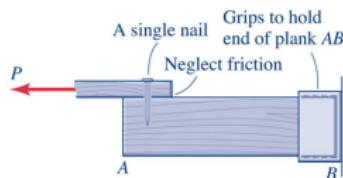


- ▶ **Assembles cloué & boulonnés:** l'effort de cisaillement est distribué entre les boulons

$$q = \frac{VQ}{I_z} \rightarrow q \cdot s \leq V_{\text{adm., boulon}}, \quad s: \text{espacement}$$

Sections assemblées: calcul de Q Sections assemblées: calcul de Q (a) Nails on a uniform spacing of Δs .

(b) A free-body diagram for determining shear force in discrete connectors.

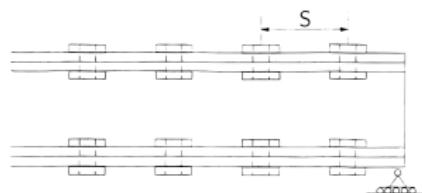
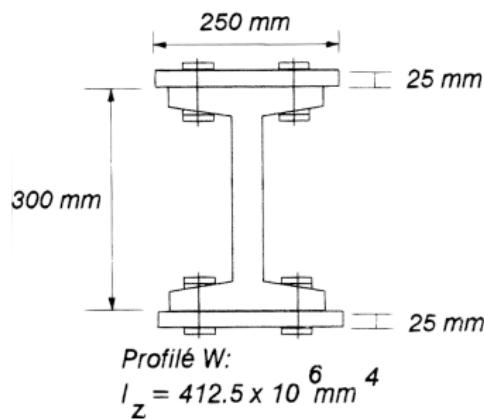


(c) A direct-shear test to determine the shear capacity of a single nail.

$Q = A' \bar{y}'$ est calculé pour l'élément connecté par l'assemblage

Exemple – Section assemblée

Exemple – Section assemblée



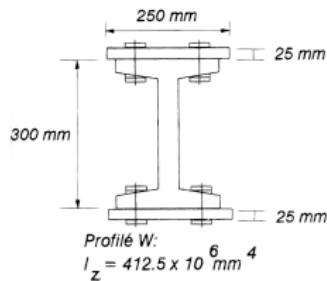
Déterminer l'espacement s sachant que

- $V = 45 \text{ kN}$
- $V_{\text{adm.}, \text{boulon}} \leq 5 \text{ kN}$

Procedure:

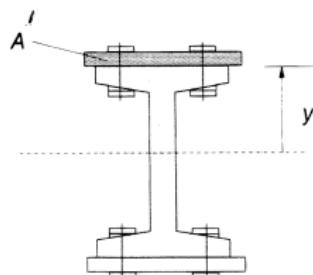
1. Calculer le flux de cisaillement q à l'interface
2. Calculer l'espacement s tel que $V_{\text{adm.}, \text{boulon}} > q \cdot s$

Exemple – Section assemblée

Exemple – Section assemblée (q)

$$\begin{aligned}I_z &= 412.5 \times 10^6 + 2 \left[\frac{250 \cdot 25^3}{12} + 25 \cdot 250 \cdot 162.5^2 \right] \\&= 743.2 \times 10^6 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

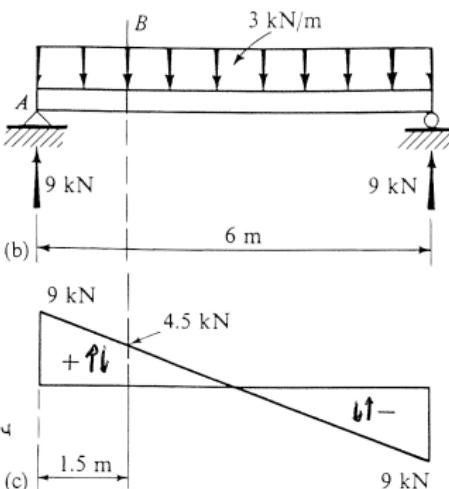
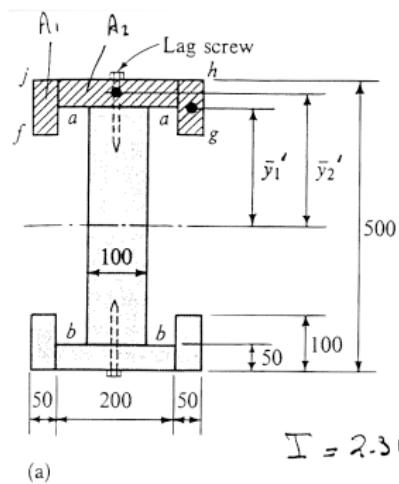
$$Q = 250 \cdot 25 \cdot 162.5 = 1.02 \times 10^6 \text{ mm}^3$$



$$q = \frac{VQ}{I_z} = \frac{45 \text{ kN} \cdot 1.02 \times 10^6 \text{ mm}^3}{743.2 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 0.062 \text{ kN/mm}$$

$$s = \frac{2 \cdot 5 \text{ kN}}{0.062 \text{ kN/mm}} = 162 \text{ mm} \rightarrow 160 \text{ mm}$$

Exemple – Section assemblée

Exemple – espacement non-uniforme 

Calculer l'espacement s des clous ($V_{\text{adm.,clou}} \leq 2 \text{ kN}$)

Procedure: (1) $Q = A' \bar{y}'$, (2) $q = VQ/I_z$, (3) $s = V_{\text{adm.,clou}}/q$

[Popov, 1999]

Résumé – Module #6b

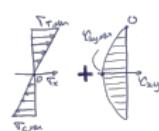
But : Calculer les contraintes de cisaillement (éléments fléchis)

Flexion pure : $\tau_{xy} = 0$

Flexion ordinaire : $\tau_{xy} \neq 0$

$$\text{Contraintes} : \tau_{xy}(y) = \frac{VQ(y)}{I_z t(y)} = \frac{q(y)}{t} \propto y, \quad [\text{MPa}]$$

$\tau_{xy,\max}$: axe neutre



$$\text{Flux de cisaillement} : q(y) = \frac{VQ(y)}{I_z}, \quad [\text{n/mm}]$$

$$\text{1er moment d'aire} : Q(y) = \sum A'_i y'_i, \quad [\text{mm}^3]$$

Limitations : $h \geq 2b$, $I \geq 4h$

Sections fermés symétriques : $\tau_{xy} = 0$ dans le plan de symétrie vertical

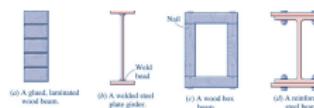
Assemblages :

$$\text{Colle} : \tau = \frac{VQ}{I_z t_{\text{collé}}} \leq \tau_{\text{adm., colle}}$$

$$\text{Soudure} : q = \frac{VQ}{I_z} \leq q_{\text{adm., soudure}} \quad [\text{force/longueur}]$$

Clous & boulons:

$$q = \frac{VQ}{I_z} \rightarrow q \cdot s \leq V_{\text{adm., boulon}}, \quad \text{où } s \text{ est l'espacement}$$



Organisation de la matière

1 Statique

- Équilibre des forces et moments
- Diagrammes de corps libres
- **5** Diagramme des efforts, $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

2 Matériaux

- Contraintes & déformations
- Loi de Hooke, Poisson & St-Venant

Chargements

- **3** Efforts axiaux
- **4** Torsion
- **6a** Flexion
- **6b** Cisaillement
- **7** Déflexion
- **9** Pression & chargements combinés

États limites

- **7** Déflexion
- **8** Contraintes 2D-3D
- **10** Lois constitutives & critères de rupture