

Module #5

Efforts internes dans les poutres

(CIV1150 - Résistance des matériaux)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
 Polytechnique Montréal



Sections 5.1-5.5 – R. Craig (2011)
Mechanics of Materials, 3rd Edition
John Wiley & Sons.

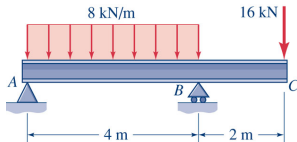
P. Léger (2006)
Notes de cours: Chapitre 5 – Flexion
Polytechnique Montréal.

Notation et terminologie

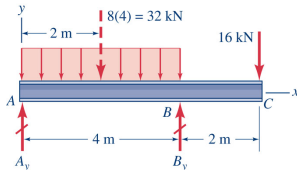
- ▶ Module 3 – efforts longitudinaux : F ou N
- ▶ Module 4 – efforts de torsion : T
- ▶ **Module 5 – efforts de flexion et de cisaillement : M & V**
But: Tracer les diagrammes des efforts $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$
- ▶ Module 6 – Contraintes de flexion dans les poutres

Qu'est-ce qu'un diagramme des efforts?

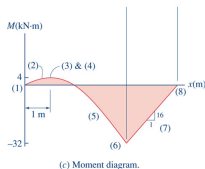
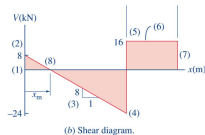
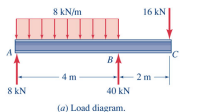
1- Structure & chargement (w_0, P, L)



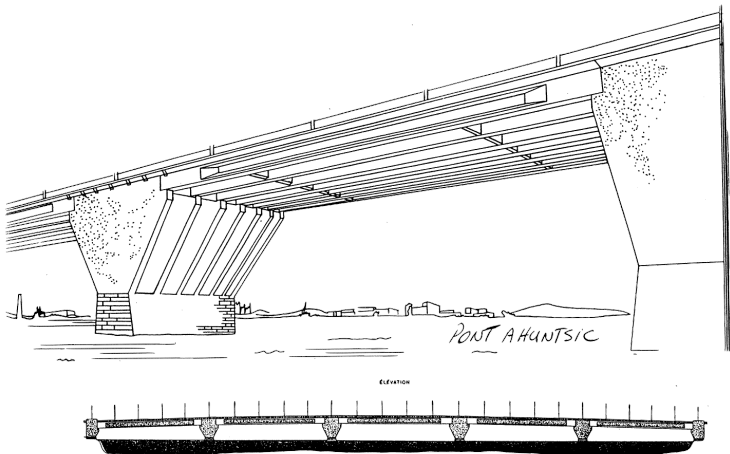
2- Réactions aux appuis ($R_a, R_b, \dots$)



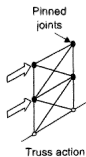
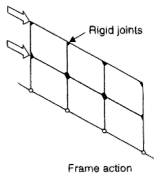
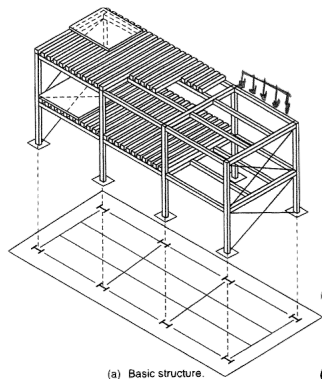
3- diagrammes des efforts ($N(x), V(x), M(x)$)



Exemples d'éléments soumis à la flexion - ponts



Exemples d'éléments soumis à la flexion - bâtiments



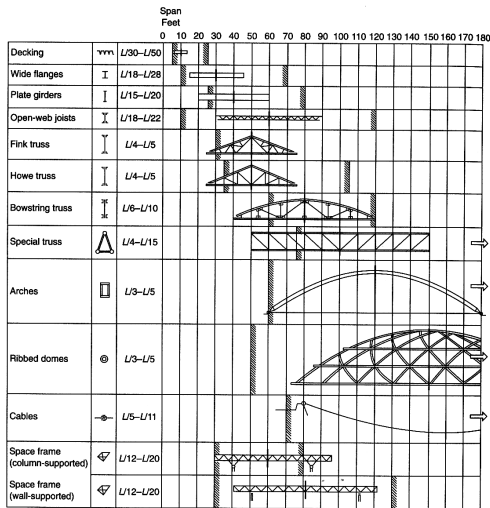
(SHOODEK 1990)



\$

[Google images]

Sélection d'un système structural (acier)



Poids porté : 11 250 kg – Poids propre : 2 273 kg

Poutre pleine en acier de section massive carrée



Poids porté : 11 250 kg – Poids propre : 278 kg

Poutre treillis en acier de hauteur variable

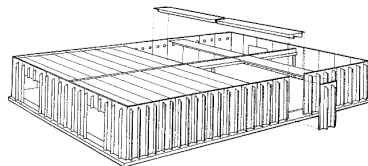
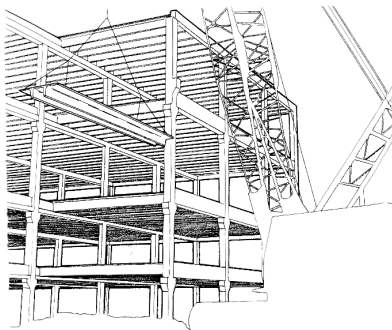
[Shodek, 1998]

Sélection d'un système structural (bois/acier/béton/...)

STRUCTURAL SYSTEM			Span Range									
			Pages	10' 3m	20' 6m	30' 9m	50' 15m	100' 30m	200' 60m	300' 90m	500' 150m	
WOOD	Joists	56-57										
	Decking	54-55										
	Solid Beams	60-61										
	Rafter Pairs	58-59										
	Light Floor Trusses	64-65										
	Light Roof Trusses	64-65										
	Glue Laminated Beams	62-63										
	Heavy Trusses	66-67										
	Glue Laminated Arches	68-69										
Domes												
BRICK & CONCRETE MASONRY	Lintels	74-75										
	Arches	84-85 79										
STEEL	Corrugated Decking	96-97										
	Light Gauge Joists	90-91										
	Beams	98-99										
	Open-Web Joists	100-101										
	Single-Story Rigid Frame	102-103										
	Heavy Trusses	104-105										
	Arches and Vaults											
	Space Frame											
	Domes											
	Cable-Stayed Suspension											
SITECAST CONCRETE	One-Way Slabs	114-115										
	Two-Way Slabs	118-121										
	One-Way Joists	116-117										
	Waffle Slab	122-123										
	Beams	112-113										
	Folded Plates and Shells											
	Domes											
PRECAST CONCRETE	Arches											
	Slabs	132-133										
	Beams	130-131										
	Double Tees	134-135										
PNEUMATIC	Single Tees	134-135										
	Air Inflated											
	Air Supported											

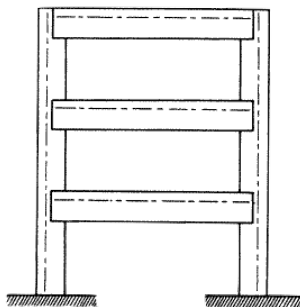
[Google images]

Exemples d'éléments soumis à la flexion - bâtiments

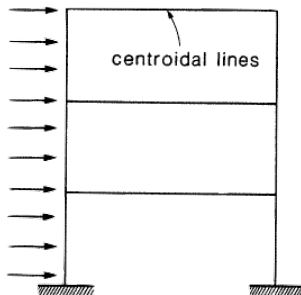


[Collins & Mitchell, 1991]

Exemples d'éléments soumis à la flexion - idéalisation



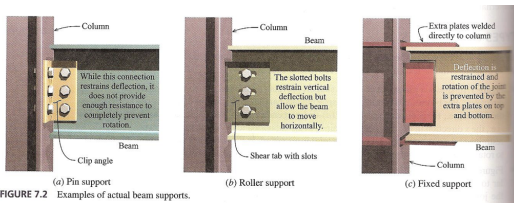
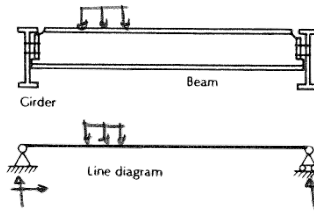
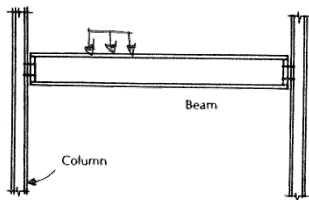
actual structure



plane frame model

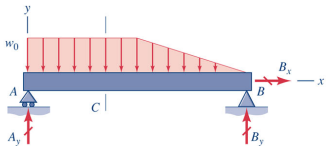
[Collins & Mitchell, 1991]

Exemples d'éléments soumis à la flexion - idéalisation

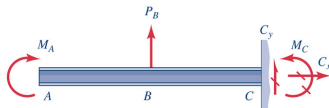


[Salvadori, 1982]

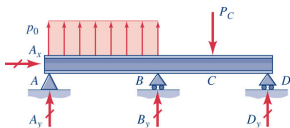
Équilibre et réactions d'appuis



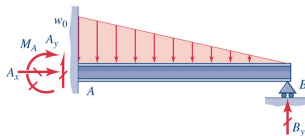
(a) A simply supported beam with distributed load.



(b) A cantilever beam with a couple at A and a concentrated force at B.

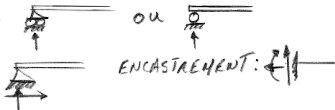


(c) A two-span continuous beam.

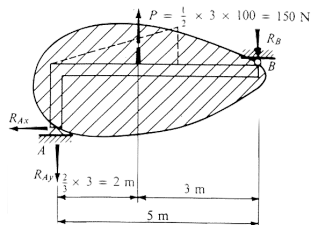
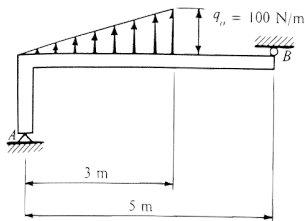


(d) A propped cantilever beam.

APPUIS À ROULEAU
APPUIS À ROTULE



Équilibre en flexion – Exemple #1



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad R_{Ax} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad -R_{By} - R_{Ay} + 150 = 0$$

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -5R_{By} + 150 \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{By} = \frac{300}{5} = 60 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = 150 - 60 = 90 \text{ N}$$

$$\text{Vérif.} \quad 150 - 90 - 60 = 0 \quad \boxed{\text{OK}}$$

Efforts internes

Schémas de la structure

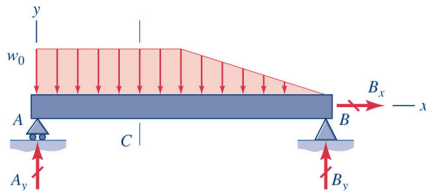
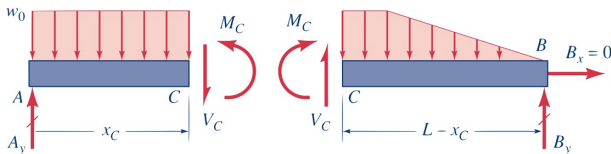
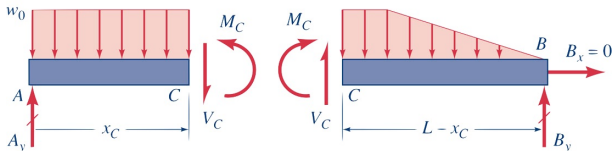


Diagramme de corps libre

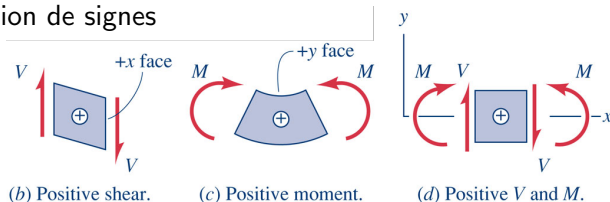


Signes

Diagramme de corps libre



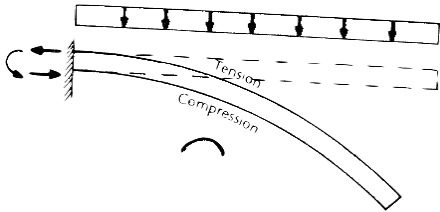
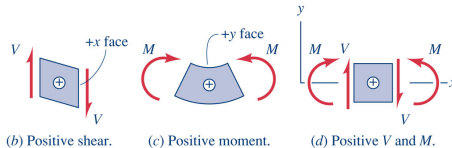
Convention de signes



Truc mnémotechnique

flexion $\rightarrow \odot = (+)$, $\ominus = (-)$, **cisaillement** $\rightarrow \oplus = (+)$

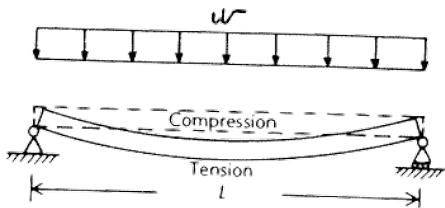
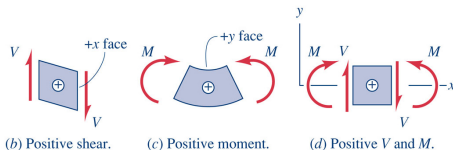
Exemple #1a – V & M , Positifs ou négatifs?



- ▶ $V > 0$
- ▶ $M < 0$
(fibre supérieure tendue)

[Hanor, 1998]

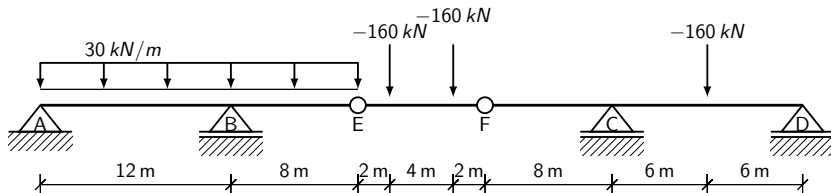
Exemple #1b – V & M , Positifs ou négatifs?



- $V \begin{cases} > 0 & \text{pour } x < L/2 \\ = 0 & \text{pour } x = L/2 \\ < 0 & \text{pour } x > L/2 \end{cases}$
- $M > 0$
(fibre inférieure tendue)

[Hanor, 1998]

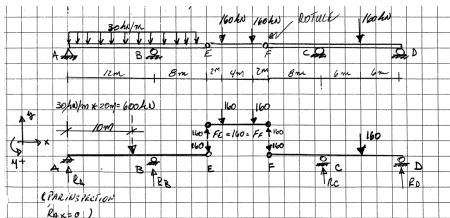
Exemple #2 – Efforts internes



a) Calculez les réactions R_A, R_B, R_C, R_D

b) Calculez les efforts internes à E et F

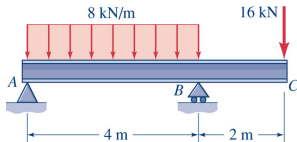
Exemple #2 – Efforts internes



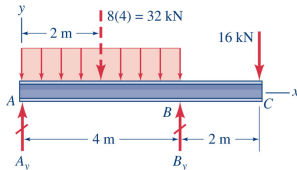
- 1- REPLACER LA CHARGE UNIFORMEMENT DISTRIBUÉE
PAR SON ÉQUIVALENT STATIQUE
- 2- CONSIDÉRER LE DCL (EE): $F_E = F_F = 160 \text{ kN}$ par symétrie
- 3- CONSIDÉRER LE DCL (ABE):
- $$\begin{aligned} \uparrow \Sigma \hat{M}_A &= 0 & -600(10) - 160(20) + R_B(12) &= 0 & R_B &= 746.67 \text{ kN} \uparrow \\ \uparrow \Sigma \hat{F}_y &= 0 & R_A + 746.67 &= 600 + 160 & R_A &= -6.67 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$
4. CONSIDÉRER LE DCL (FBD)
- $$\begin{aligned} \uparrow \Sigma \hat{M}_D &= 0 & 160(20) + 160(6) - R_C(12) &= 0 & R_C &= 346.67 \text{ kN} \uparrow \\ \uparrow \Sigma \hat{F}_y &= 0 & 160 + 160 &= 346.67 + R_D & R_D &= -26.67 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$

Qu'est-ce qu'un diagramme des efforts? (rappel)

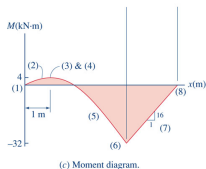
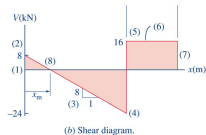
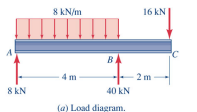
1- Structure & chargement (w_0, P, L)



2- Réactions aux appuis ($R_a, R_b, \dots$)



3- diagrammes des efforts ($N(x), V(x), M(x)$)



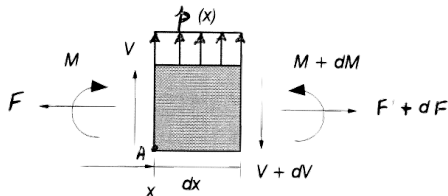
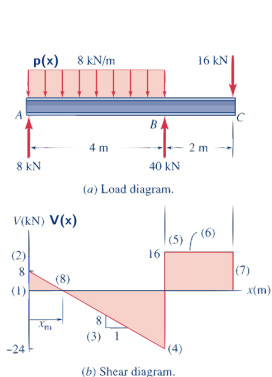
Introduction aux méthodes de calcul

Comment calculer et tracer les diagrammes d'efforts normaux, d'efforts tranchants et de moments fléchissants?

3 méthodes

1. **Formulation analytique:** Écrire l'équation pour $p(x)$ et intégrer pour $V(x)$ & $M(x)$
2. **Équilibre:** Calculs faits à partir de DCL pour des coupes faites à différentes sections
3. **Méthode graphique:** Intégration du diagramme $p(x)$ & $V(x)$

Formulation analytique – Relations entre $p(x)$ & $V(x)$

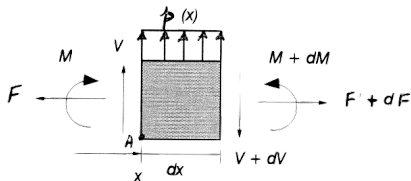
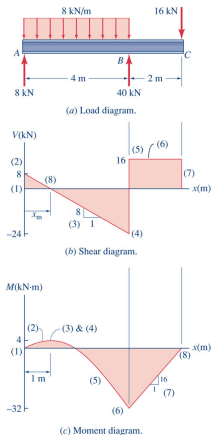


$$\uparrow \sum F_y = 0 = V + p(x)dx - (V + dV)$$

$$p(x) = \frac{dV}{dx}, \quad V(x) = \int p(x)dx + c_1$$

Effort tranchant: l'intégrale de la charge appliquée $p(x)$

Formulation analytique – Relations entre $V(x)$ & $M(x)$



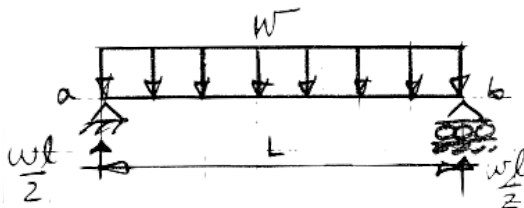
$$\sum M_A = 0 = -M + M + dM - (V + dV)dx + p(x)dx \frac{dx}{2} \approx 0$$

$$dM = Vdx$$

$$V = \frac{dM}{dx}, \quad M(x) = \int V(x)dx + c_2$$

Moment fléchissant: l'intégrale de la charge appliquée $V(x)$

Formulation analytique #3 – exemple



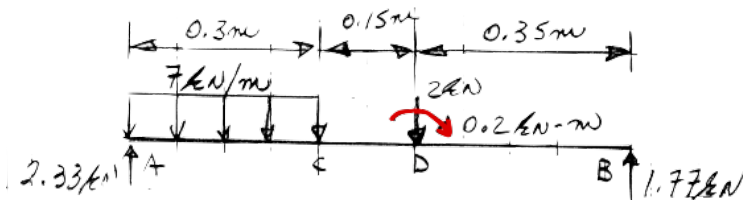
Formulation analytique – en résumé

- ▶ Applicable dans tous les cas
- ▶ Pratique afin de déterminer les diagrammes d'efforts pour les cas de base
- ▶ Application fastidieuse lorsqu'il y a des discontinuités

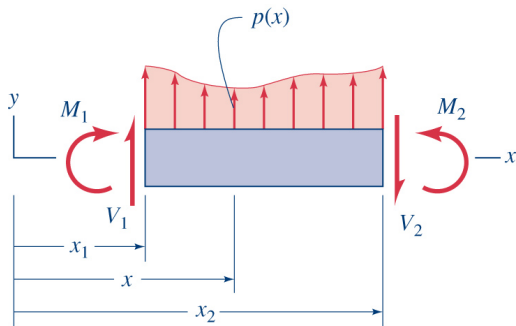
Méthode #2 – Équilibre

1. Calculer les réactions d'appuis ($\sum F_{x,y,z} = 0$, $\sum M_{x,y,z} = 0$)
2. Identifier les sections clefs
 - ▶ $x = 0, x = L$ (extrémités & discontinuité)
 - ▶ $V = 0$ (moment maximum)
 - ▶ $P \neq 0$ (au droit des charges et moments concentrés)
3. Calculer les efforts internes (N , V , & M) en **effectuant des coupes de chaque côté des sections clefs** (diagrammes de corps libre)
4. Identifier la **forme des diagrammes** d'efforts internes entre les coupes

Exemple #4 – Diagrammes de V & M



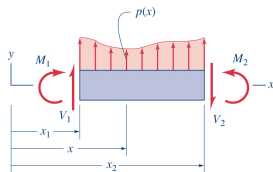
Méthode #3 - Méthode graphique



$$V(x) = V_1 + \int_{x_1}^{x_2} p(\xi) d\xi$$

$$M(x) = M_1 + \int_{x_1}^{x_2} V(\xi) d\xi$$

Méthode graphique – $p(x)$, $V(x)$, $M(x)$



$$V(x) = V_1 + \int_{x_1}^{x_2} p(\xi) d\xi$$

$$M(x) = M_1 + \int_{x_1}^{x_2} V(\xi) d\xi$$

Charge appliquée $p(x)$	Effort tranchant $V(x)$	Moment fléchissant $M(x)$
$= 0$	$= cte$ (constant)	$\propto x$ (linéaire)
$= cte$ (constant)	$\propto x$ (linéaire)	$\propto x^2$ (quadratique)
$\propto x$ (linéaire)	$\propto x^2$ (quadratique)	$\propto x^3$ (cubique)

Cas types

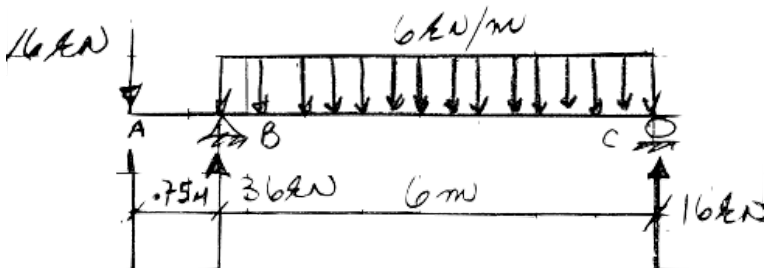
TABLE 5.1 Shear and Moment Diagram Features

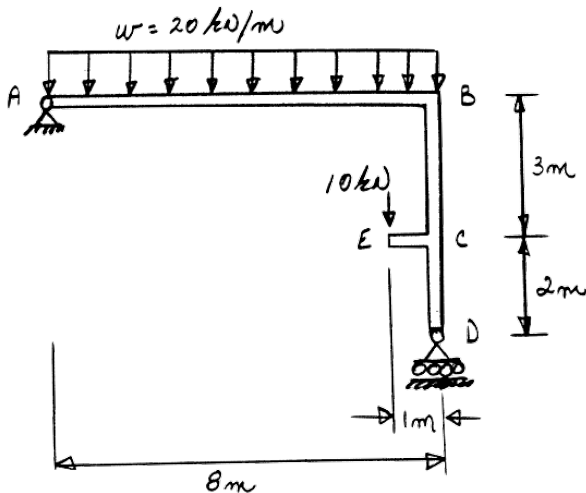
Equation	Load Diagram P	Shear Diagram V	Moment Diagram M
1. Slope of shear diagram equals value of load			
$\frac{dV}{dx} = p(x)$ (Eq. 5.2)			
2. Jump in shear equals value of concentrated load			
$\Delta V = P_0$ (Eq. 5.4)			
3. Change in shear equals area under distributed-load diagram			
$V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$ (Eq. 5.6)			
4. Slope of moment diagram equals value of shear			
$\frac{dM}{dx} = V(x)$ (Eq. 5.3)			
5. Jump in moment equals - (value of concentrated couple)			
$\Delta M = -M_0$ (Eq. 5.5)			
6. Change in moment equals area under shear diagram			
$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)dx$ (Eq. 5.7)			

Méthode #3 – Graphique

1. Calculer les réactions d'appuis ($\sum F_{x,y,z} = 0$, $\sum M_{x,y,z} = 0$)
2. Dessinez le diagramme de V
3. Calculer le moment à l'extrémité gauche de la poutre
4. Calculer $M(x)$ en intégrant l'aire sous $V(x)$

Exemple #5 – Diagrammes de V & M



Cadres – exemple #6 

Résumé – Module #5

But : Tracer les diagrammes des efforts $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Signes : 

flexion $\rightarrow \odot = (+)$, $\ominus = (-)$, **cisaillement** $\rightarrow \oplus = (+)$

Méthodes :

1. **Formulation analytique**: Écrire l'équation pour $p(x)$ et intégrer pour $V(x)$ et $M(x)$
2. **Équilibre**: Calculs faits à partir de DCL pour des coupes faites à différentes sections
3. **Méthode graphique**: Intégration du diagramme $V(x)$

Cadres : Il y a un transfert des efforts au droit des discontinuités

Organisation de la matière

- | | | |
|-------------------|---|---|
| 1 Statique | { | - Équilibre des forces et moments |
| | | - Diagrammes de corps libres  |
| | | - 5 Diagramme des efforts, $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ |
| 2 Matériau | { | - Contraintes & déformations |
| | | - Loi de Hooke, Poisson & St-Venant  |
| Chargements | { | - 3 Efforts axiaux  |
| | | - 4 Torsion  |
| | | - 6a Flexion  |
| | | - 6b Cisaillement  |
| | | - 7 Déflexion  |
| | | - 9 Pression & chargements combinés  |
| États limites | { | - 7 Déflexion  |
| | | - 8 Contraintes 2D-3D  |
| | | - 10 Lois constitutives & critères de rupture  |