

Module #4

Torsion

(CIV1150 - Résistance des matériaux)

Enseignant: James-A. Goulet

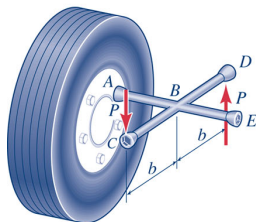
Département des génies civil, géologique et des mines
 Polytechnique Montréal



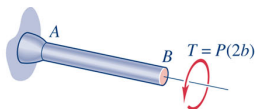
Sections 4.1-4.7 – R. Craig (2011)
Mechanics of Materials, 3rd Edition
 John Wiley & Sons.

Sections 4.1-4.10 – P. Léger (2006)
Notes de cours: Chapitre 4 – Torsion
 Polytechnique Montréal.

Introduction aux efforts et déformations de torsion



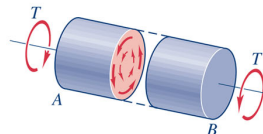
(a) Use of a lug-wrench.



(b) Lug-wrench shaft in torsion.



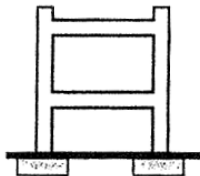
(c) A torsion rod.



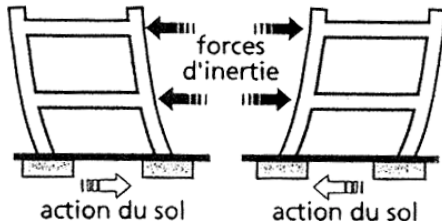
(d) The shear-stress distribution.

Exemples du génie civil – 1

AVANT LE SÉISME



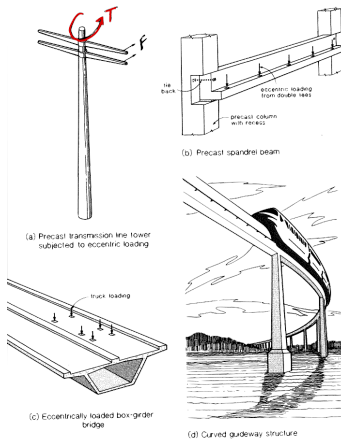
APRÈS LE SÉISME



a) oscillations horizontales

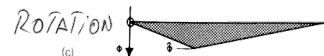
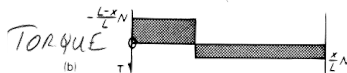
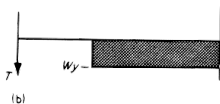
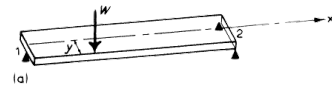
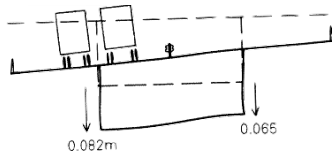
[Zacek (1996), Davidovici (1999)]

Exemples du génie civil – 2

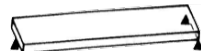


[Collins & Mitchell, 1991]

Exemples du génie civil – 3



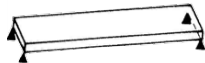
Exemples du génie civil – 3 (cont.)



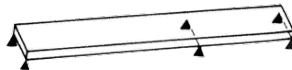
(a)



(b)



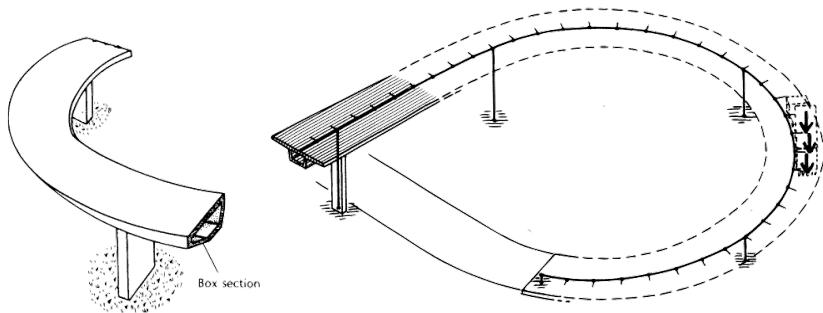
(c)



(d)

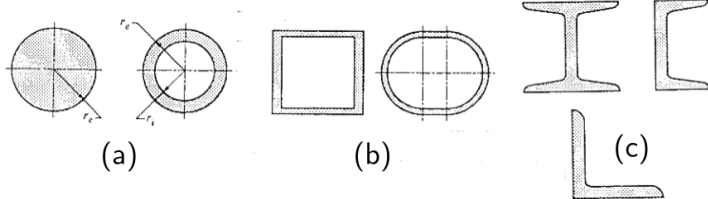
- (a) Isostatique – flexion & torsion
- (b) Isostatique – torsion, hyperstatique – flexion
- (c) Isostatique – flexion, hyperstatique – torsion
- (d) Hyperstatique – flexion & torsion

Exemples du génie civil – 4 (cont.)



[Hambly, 1991]

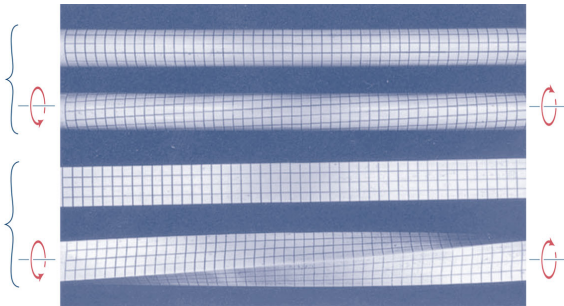
Exemples du génie civil – Types de sections



- (a) Sections circulaires fermées
- (b) Sections non circulaires fermées
- (c) Sections ouvertes

Torsion – sections pleines

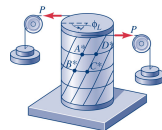
(a) A steel torsion rod with circular cross section.



(b) A steel torsion bar with square cross section.

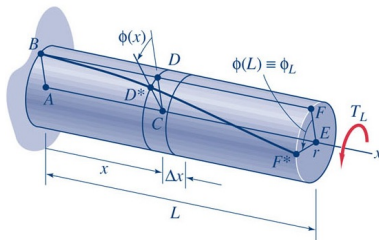


(a) Before deformation.



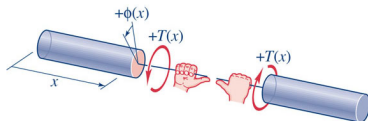
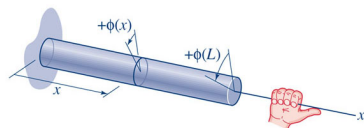
(b) After deformation.

Nomenclature



Déformation axiale		Torsion	
Force axiale	(F)	(T)	Couple / Torque
Allongement	(e)	(ϕ)	Angle de rotation [rad]
Contrainte normale	(σ)	(τ)	Contrainte de cisaillement
Déformation axiale	(ϵ)	(γ)	Déformation en cisaillement
Module élastique	(E)	(G)	Module de cisaillement

Convention de signes

(b) Sign convention for internal (resisting) torque $T(x)$.(c) Sign convention for angle of rotation $\phi(x)$.

- **Efforts & rotations internes** : + si le pouce de la main droite pointe vers l'extérieur de la surface normale
- **Efforts externes et rotations des noeuds** : + si le pouce de la main droite pointe dans la direction x

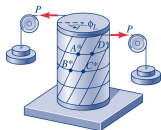
Hypothèses de base pour les barres circulaires



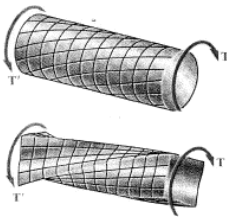
- ▶ Matériau **homogène**, **isotrope**, **linéaire élastique**
- ▶ L'axe longitudinal **reste droit** et **ne s'allonge pas**
- ▶ Les sections **restent planes** et $\perp$ à l'axe longitudinal (**pas de gauchissement**)



(a) Before deformation.



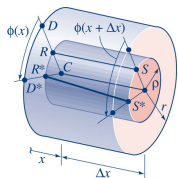
(b) After deformation.



- ▶ Les lignes radiales **restent droites** et les sections tournent autour de l'axe longitudinal

Déformation et rotation des barres circulaires

Changement d'angle $\phi \rightarrow$ **déformations** γ et **contraintes** τ de cisaillement



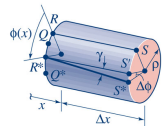
(a) An element of length Δx .

$$\gamma \equiv \gamma(x, \rho) = \frac{\pi}{2} - \angle Q^* R^* S^* = \angle S' R^* S^*$$

$$\gamma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S^* S'}{R^* S'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho \Delta \phi}{\Delta x} = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

$\frac{d\phi}{dx}$: Taux de rotation [rad/mm]

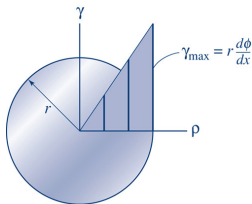
Équation déformation (γ) déplacement (ϕ)



(b) The core of radius ρ .

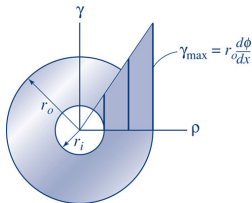
$$\gamma \equiv \gamma(x, \rho) = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

Distribution des déformations de torsion



(a)

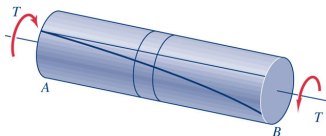
$$\gamma \equiv \gamma(x, \rho) = \rho \frac{d\phi}{dx}$$



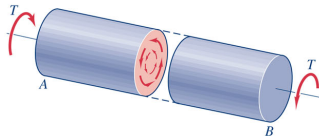
(b)

- $\gamma = 0$ pour $\rho = 0$ (centre de la barre)
- $\gamma \propto \rho$, i.e. varie linéairement avec ρ
- Relation valide pour les barres pleines et vides

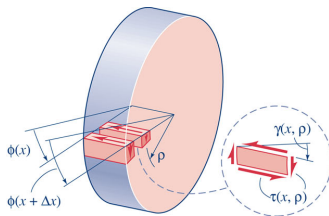
Relation contraintes-déformations



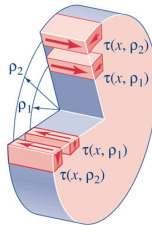
(a) Torsional deformation.



(b) Shear stress due to torsion.



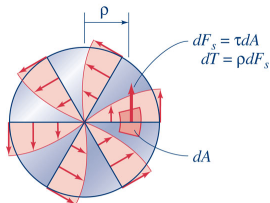
(c) Shear stress and shear strain at typical points.



(d) Shear stresses along two typical radial lines in a cross section, and shear stress on radial planes.

Relation contraintes-déformations (cont.)

Loi de Hooke



(a) The shear stress distribution.

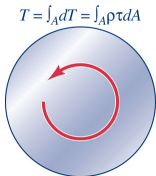
$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\phi}{dx}$$

Couple / torque

$$T = \int_A \rho dF_S = \int_A \rho \tau dA = \int_A \rho \left(G\rho \frac{d\phi}{dx} \right) dA$$

Si G est indépendant de ρ

$$T = G \frac{d\phi}{dx} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\phi}{dx} I_p$$



(b) The resultant torque.

I_p : Inertie polaire; cercle: $I_p = \pi r^4/2$

I_p : Inertie polaire

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

Section circulaire pleine ●

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

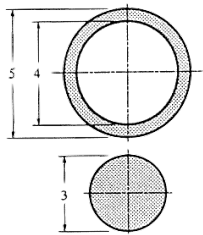
Section circulaire vide ○

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \rho^2 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \rho^3 d\rho = \left[\frac{2\pi \rho^4}{4} \right]_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \\ &= \frac{\pi}{2} (r_{\text{ext}}^4 - r_{\text{int}}^4) \end{aligned}$$

Cylindre v.s. barre – Exemple

$$A_{\text{barre}} = \pi r_{\text{ext}}^2 = \pi \cdot 1.5^2 = 7.07$$

$$A_{\text{cylindre}} = \pi r_{\text{ext}}^2 - \pi r_{\text{int}}^2 = \pi(2.5^2 - 2^2) = 7.07$$



$$A_{\text{barre}} = A_{\text{cylindre}}$$

Comparez $I_{p,\text{cylindre}}$ et $I_{p,\text{barre}}$?

$$I_{p,\text{barre}} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 3^4}{32} = \underline{7.95}$$

$$I_{p,\text{cylindre}} = \frac{\pi}{2}(r_{\text{ext}}^4 - r_{\text{int}}^4) = \frac{\pi}{2}(2.5^4 - 2^4) = \underline{36.2}$$

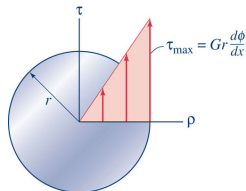
$$I_{p,\text{cylindre}} > 5 I_{p,\text{barre}}$$

[Bazergui, 2000]

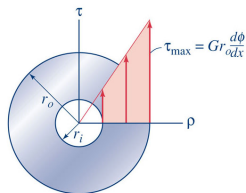
Rigidité torsionnelle

$$T = Gl_p \frac{d\phi}{dx}$$

Rigidité torsionnelle



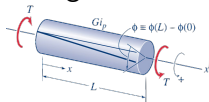
(a)



(b)

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{Gl_p}$$

Angle de torsion



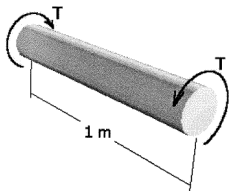
$$\phi = \int_0^L \frac{d\phi}{dx} dx = \frac{TL}{Gl_p}$$

Contrainte due à la torsion (G constant)

$$\tau = \frac{T\rho}{l_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{l_p}$$

Torsion barre – Exemple (MDS 4.1)



$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 15 \text{ mm}^4}{32} = \underline{4\,970 \text{ mm}^4}$$

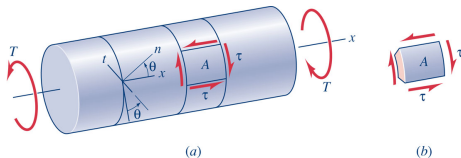
$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_p} = \frac{50\,000 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 7.5 \text{ mm}}{4\,970 \text{ mm}^4} = \underline{75.43 \text{ MPa}}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} = \frac{50\,000 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 1\,000 \text{ mm}}{75\,000 \text{ MPa} \cdot 4\,970 \text{ mm}^4} = \underline{0.134 \text{ rad}}$$

- ▶ $d = 15 \text{ mm}$
- ▶ $G = 75 \text{ GPa}$
- ▶ $T = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$
- ▶ $\tau_{\max} = ?$
- ▶ $\phi = ?$

Relation entre τ et σ

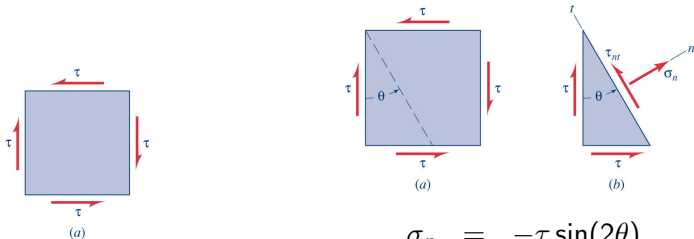
L'élément A est soumis à un cisaillement pur



$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= -\tau \sin(2\theta) \\ \tau_{nt} &= -\tau \cos(2\theta) \end{aligned} \right\} \text{voir dérivation, p.250, Craig}$$

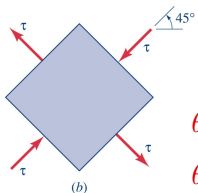
$$\sigma_{n,\max} = \tau : \theta = -45^\circ \quad \tau_{nt,\min} = -\tau : \theta = 0^\circ$$

Relation entre τ et σ (cont.)



$$\sigma_n = -\tau \sin(2\theta)$$

$$\tau_{nt} = -\tau \cos(2\theta)$$



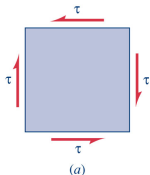
$$\theta = 0^\circ : \sigma_n = \sigma_{n,\min} = 0, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt,\min} = -\tau$$

$$\theta = +45^\circ : \sigma_n = -\sigma_{n,\max} = -\tau, \quad \tau_{nt} = 0$$

$$\theta = -45^\circ : \sigma_n = \sigma_{n,\max} = \tau, \quad \tau_{nt} = 0$$

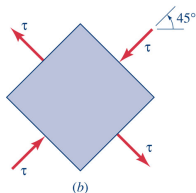
Distribution des déformations

Rappel module #2



$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Déformations normales



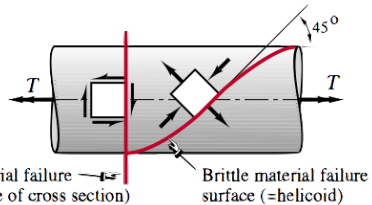
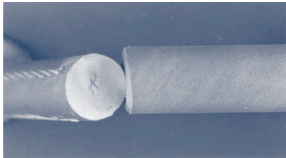
$$\epsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}[-\tau - \nu \cdot \tau] = -\frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

$$\epsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E}[\tau - (\nu \cdot -\tau)] = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

$$\epsilon_{45^\circ} = \epsilon_{\text{max.comp.}} = -\frac{\tau}{2G}$$

$$\epsilon_{-45^\circ} = \epsilon_{\text{max.tens.}} = \frac{\tau}{2G}$$

Rupture ductile v.s. fragile



a) Rupture ductile: acier & aluminium

b) Rupture fragile: béton, 🧱 & 🥕

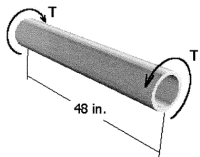
Matériau fragile

résistance à la traction < résistance au cisaillement

Matériau ductile

résistance à la traction > résistance au cisaillement

Torsion tube – Exemple (MDS 4.5)



$$I_p = \frac{\pi}{32}(d_{\text{ext}}^4 - d_{\text{int}}^4) = \frac{\pi}{32}(0.75^4 - 0.675^4)$$

$$= \underline{0.011 \text{ in}^4}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} \rightarrow T = \frac{GI_p \phi}{L} = \frac{11\,000 \text{ ksi} \cdot 0.011 \text{ in}^4 \cdot 0.1 \text{ rad}}{48 \text{ in}}$$

$$= \underline{0.245 \text{ kips} \cdot \text{in}}$$

► $d_{\text{int}} = 0.675 \text{ in}$

► $d_{\text{ext}} = 0.75 \text{ in}$

► $\phi = 0.1 \text{ rad}$

► $G = 11\,000 \text{ ksi}$

► $T = ?$

► $\sigma_{n,\text{max}} = ?$

► $\epsilon_{n,\text{max}} = ?$

$$\sigma_{n,\text{max}} = \tau_{n,\text{max}} = \frac{Tr}{I_p} = \frac{0.245 \text{ kips} \cdot \text{in} \cdot 0.75 \text{ in}}{2 \cdot 0.011 \text{ in}^4}$$

$$= \underline{8.59 \text{ ksi}}$$

$$\epsilon_{n,\text{max}} = \frac{\tau_{n,\text{max}}}{2G} = \frac{8.59 \text{ ksi}}{2 \cdot 11\,000 \text{ ksi}}$$

$$= \underline{3.9 \times 10^{-4} \text{ (Tension)}}$$

Relation torsion – angle de rotation

$$\phi_i = \left(\frac{TL}{GJ_p} \right)_i$$

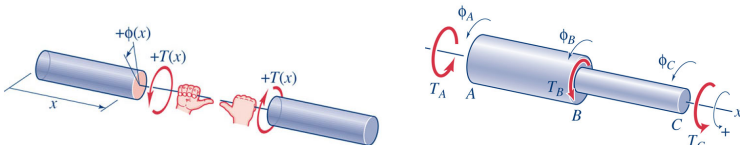
Coefficient de flexibilité: Angle de rotation ϕ_i produit par un couple unitaire $T_i = 1$

$$\phi_i = f_{ti} T_i, \text{ où } f_{ti} = \left(\frac{L}{GJ_p} \right)_i$$

Coefficient de rigidité: Couple T_i produit par une rotation unitaire $\phi_i = 1$

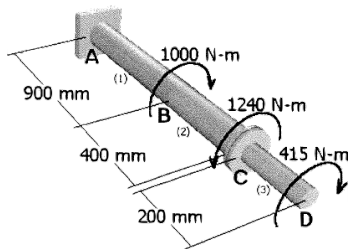
$$T_i = k_{ti} \phi_i, \text{ où } k_{ti} = \left(\frac{GJ_p}{L} \right)_i$$

Assemblages – convention de signes



- **Efforts & rotations internes** : + si le pouce de la main droite pointe vers l'extérieur de la surface normale
- **Efforts externes et rotation des noeuds** : + si le pouce de la main droite pointe dans la direction x

Assemblage isostatique – Exemple (MDS 4.7)



- ▶ $d_{AC,int} = 35 \text{ mm}$, $d_{AC,ext} = 45 \text{ mm}$
- ▶ $d_{CD} = 30 \text{ mm}$
- ▶ $G = 75\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $\tau_{max} = ?$, $\phi_B = ?$, $\phi_C = ?$, $\phi_D = ?$

Plan:

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_p}, \quad \phi = \frac{TL}{GI_p}$$

Stratégie pour résoudre les problèmes hyperstatiques

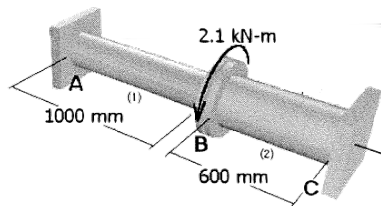
Méthode des forces (Même qu'au chapitre 3)

1. Équations d'équilibre
2. Écrire les éq. couple-rotation pour chaque élément

$$\phi_i = f_{ti} T_i, \text{ où } f_{ti} = \frac{L_i}{G_i I_{p,i}} \quad (\text{Coefficient de flexibilité})$$

3. Écrire les éq. de compatibilité des rotations
4. Substituer les ϕ_i (étape 2) dans les éq. de compatibilité (étape 3)
5. Substituer le résultat (étape 4) dans les équations d'équilibre (étape 1) pour calculer les couples inconnues
6. Calculer les rotations en substituant les couples (étape 5) dans les éq. couple-rotation (étape 2)

Assemblage hyperstatique – Exemple (MDS 4.8)

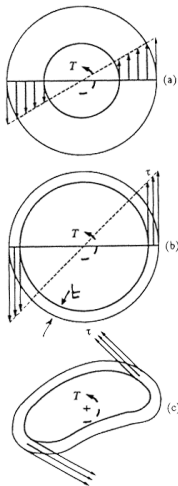


- ▶ $d_{AB} = 40 \text{ mm}$
- ▶ $d_{BC,\text{ext}} = 65 \text{ mm}, d_{BC,\text{int}} = 50 \text{ mm}$
- ▶ $G_{AB} = 42\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $G_{BC} = 28\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $\tau_{\text{max}} = ?, \phi_B = ?$

Plan:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Tr}{I_p}, \quad \phi_i = \frac{T_i L_i}{G_i I_{p,i}}$$

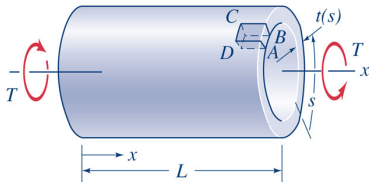
Hypothèses de base – tubes à parois minces



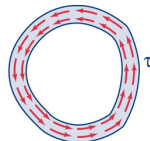
- ▶ **Section est constante** le long de l'axe longitudinal
- ▶ **Section fermée**
- ▶ Les **épaisseurs des parois sont minces** par rapport aux dimensions de la section
- ▶ Les extrémités sont **libres de se déformer hors du plan** (gauchissement permis)
- ▶ Les couples sont appliqués aux extrémités
- ▶ La contrainte de cisaillement **τ est constante sur l'épaisseur**
- ▶ La contrainte est **parallèle à la courbe médiane** qui définit la section

[Bazergui, 2000]

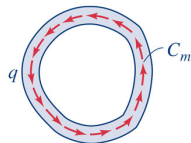
Flux de cisaillement q



(a) A thin-wall torsion member.



(b) The shear stress due to torsion.

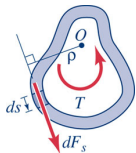


(c) The shear flow $q = \tau t$.

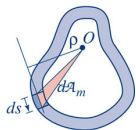
$$q = \tau t \quad [N/m, lb/in]$$

Couple résultant

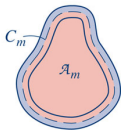
Force de cisaillement



(a)



(b)



(c)

$$dF_S = q \cdot ds$$

Le moment de torsion autour d'un point O

$$dT = \rho \cdot dF_S = q \cdot \rho \cdot ds$$

T : intégrale de dT le long de la courbe médiane C_m

$$T = \oint_{C_m} q \cdot \rho ds$$

L'intégrale de contour est obtenue selon

$$\oint_{C_m} \rho ds = 2\mathcal{A}_m \rightarrow T = q \cdot 2\mathcal{A}_m$$

Contrainte et angle de torsion

La **contrainte** dans un tube à parois minces est calculée selon

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2tA_m}$$

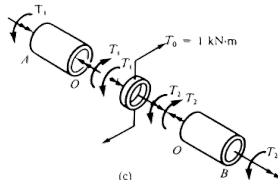
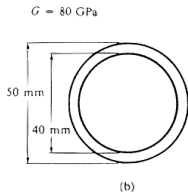
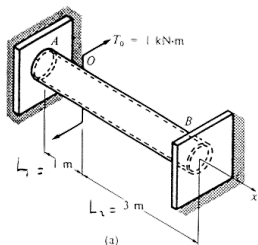
L'**angle de rotation** est calculé avec les méthodes énergétiques (chapitre 11)

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint_{C_m} \frac{ds}{t(s)} = \frac{TL}{GJ}$$

où **GJ** est la rigidité en torsion d'une section

$$J = \frac{4A_m^2}{\oint_{C_m} \frac{ds}{t(s)}} \rightarrow \text{cte. de torsion, voir tables pour sections courantes}$$

Comparaison tubes et parois minces – Exemple



Utiliser (1) la théorie de la **torsion des tubes** et (2) des **sections à parois minces** pour:

a) Calculer la contrainte de cisaillement τ_0

b) Calculer l'angle de rotation ϕ_0

Comparaison tubes et parois minces – résumé

La rotation due à un moment de torsion T est

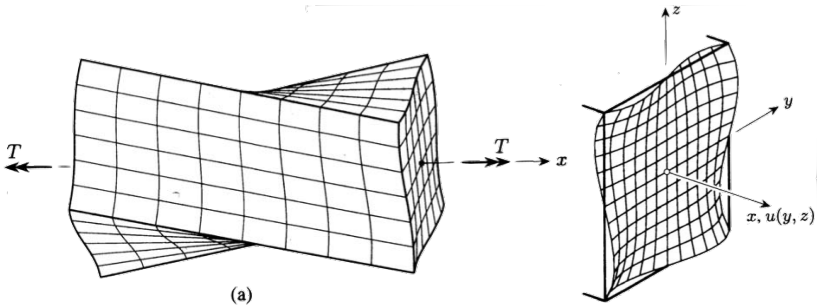
$$\Delta\phi = \frac{TL}{GJ} \text{ où } J = \begin{cases} \bigcirc : I_p, & \text{Moment polaire} \\ \text{A}_m : \frac{4\mathcal{A}_m^2}{\oint_{C_m} \frac{ds}{t(s)}}, & \text{Constante de torsion} \end{cases}$$

La contrainte de cisaillement est

$$\tau = \begin{cases} \bigcirc : \frac{Tr}{J}, & \text{tube épais} \\ \text{A}_m : \frac{T}{2\mathcal{A}_m t}, & \text{tube mince} \end{cases}$$

Gauchissement

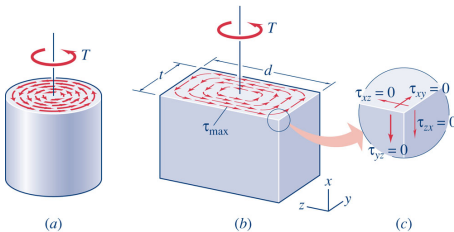
Gauchissement: déformation hors plan des sections non circulaires



[Frey, 1998]

Contraintes et rotation

Dans les sections prismatiques, les contraintes sont nulles aux coins



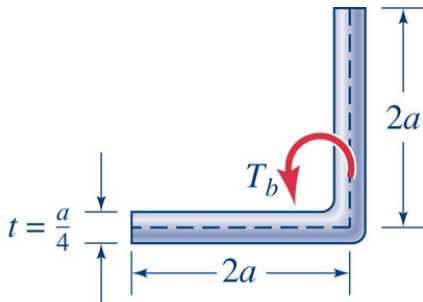
Les équations décrivant les contraintes et déformations sont obtenues à partir de la théorie de l'élasticité

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha d t^2}, \text{ où } d/t \geq 1$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ}, \text{ où } J = \beta d t^3$$

Torsion des sections ouvertes à parois minces

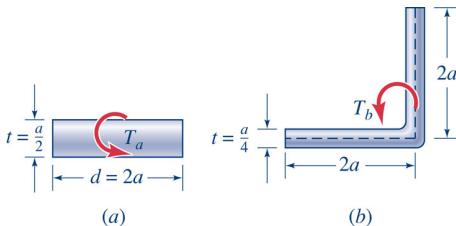
On considère les sections ouvertes à paroi minces comme des sections rectangulaires élancées



$$d = 4a$$

$$t = a/4$$

Section ouvertes v.s. fermées – Exemple (Craig. 4.15)



Calculer T_a et T_b nécessaires afin de produire une rotation ϕ

Plan:

$$T = \frac{GJ}{L}\phi, \text{ où } J = \beta dt^3$$

TABLE 4.3 Torsion Constants for Rectangular Bars

d/t	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.298	0.307	0.312	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.298	0.307	0.312	0.333

Section ouvertes v.s. fermées – Exemple (Craig. 4.15)

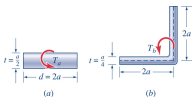


TABLE 4.3 Torsion Constants for Rectangular Bars

d/t	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.298	0.307	0.312	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.298	0.307	0.312	0.333

$$a) \quad d/t = \frac{2a}{a/2} = 4 \rightarrow \beta = 0.281$$

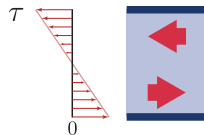
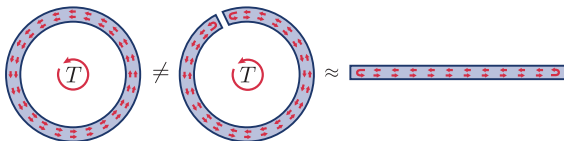
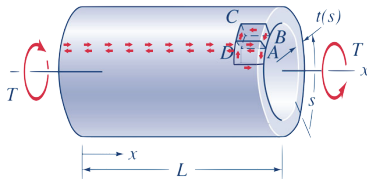
$$b) \quad d/t = \frac{4a}{a/4} = 16 \rightarrow \beta = 0.323$$

$$T = \frac{GJ}{L}\phi, \text{ où } J = \beta dt^3$$

$$\frac{T_{4:\text{rect}}}{T_{16:\text{langle}}} = \frac{J_a}{J_b} = \frac{0.281(2a)(a/2)^3}{0.323(4a)(a/4)^3} = 3.48$$

Les membrures ouvertes ont une faible rigidité torsionnelle

Sections ouvertes versus sections fermées



Résumé – Module #4

Définitions : (T) couple, (ϕ) angle de rotation, (τ) contrainte de cisaillement, (γ) déformation en cisaillement, (G) module de cisaillement

Hypothèses (sections circulaires) : axe longitudinal et lignes radiales restent droits & sections restent planes

Déformation en cisaillement : $\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$ 

Loi de Hooke : $\phi = \frac{TL}{GJ_p}$ 

Contraintes : $\tau = G\gamma = \frac{T\rho}{J_p}$  

Assemblages hyperstatiques : méthode des forces

Sections ouvertes : mauvais choix pour la torsion

Sections minces et rectangulaires : méthode approximative

Organisation de la matière

- | | | | | |
|---------------|---|---|--|---|
| 1 | Statique | { | - Équilibre des forces et moments | |
| | | | - Diagrammes de corps libres  | |
| 5 | Diagramme des efforts, $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ | { | | |
| | | | | |
| 2 | Matériau | { | - Contraintes & déformations |  |
| | | | - Loi de Hooke, Poisson & St-Venant | |
| Chargements | | { | - 3 Efforts axiaux  | |
| | | | - 4 Torsion  | |
| | | | - 6a Flexion  | |
| | | | - 6b Cisaillement  | |
| | | | - 7 Déflexion  | |
| | | | - 9 Pression & chargements combinés  | |
| États limites | | { | - 7 Déflexion  | |
| | | | - 8 Contraintes 2D-3D  | |
| | | | - 10 Lois constitutives & critères de rupture  | |