

Module #3

Déformations axiales

(CIV1150 - Résistance des matériaux)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines
 Polytechnique Montréal



Sections 3.1-3.8, 3.11 – R. Craig (2011)
Mechanics of Materials, 3rd Edition
John Wiley & Sons.

Sections 3.1-3.8 – P. Léger (2006)
Notes de cours: Chapitre 3 – Déformations axiales
Polytechnique Montréal.

Introduction aux efforts axiaux et déformations axiales

Étude des barres (traction & compression):

1. Structures isostatique
2. Dilatation thermique
3. Structures hyperstatique



Exemples d'applications:

- ▶ Treillis
- ▶ Assemblages boulonnés
- ▶ Tirants



[Google images]

Hypothèses déformations axiales

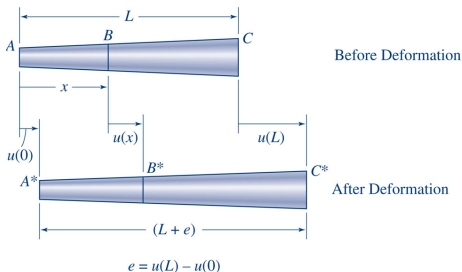
Hypothèses

- ▶ La membrure demeure **droite** sous l'application de la charge
- ▶ Les sections planes $\perp$ à l'axe longitudinal **demeurent planes et $\perp$** sous le chargement et ne subissent **pas de rotation**

Critères nécessaires pour satisfaire les hypothèses

- ▶ Membrure **droite**
- ▶ Membrure **élancée**
- ▶ La charge est appliquée au **centre de gravité** de la section

Calcul des déformations et de l'allongement d'une barre



$$\epsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

$$e_{AB} = \int_0^x \epsilon_x(x) dx$$

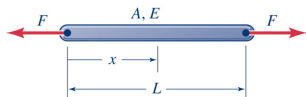
- $A(x)$: Aire de la section variant selon x
- $F(x)$: Force axiale variant selon x (ex: poids propre)
- $u(x)$: Déplacement au point x
- $\epsilon_x(x)$: Déformation au point x
- e_{AB} : Allongement entre les points A et B

Calcul des déformations et de l'allongement d'une barre

$$\frac{F(x)}{A(x)} = \sigma(x) = E\epsilon(x)$$

$$\epsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{F(x)}{EA(x)}$$

$$\text{Allongement total} := e = \int_0^L \frac{F(x)}{EA(x)} dx$$



(a) A uniform axial-deformation member.



(b) Free-body diagram.

Si $A(x) = A$ et $F(x) = F$

$$e = \frac{F}{EA} \int_0^L dx = \boxed{\frac{FL}{EA}}$$

Barre à section variable – Exemple

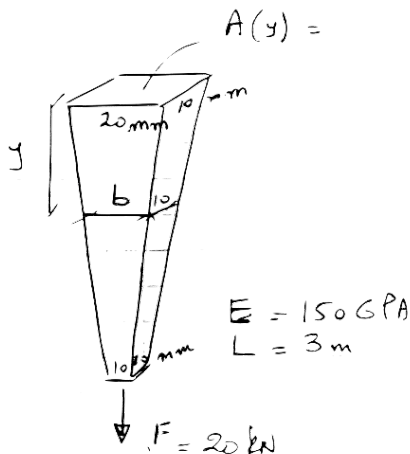
Calculer l'allongement e

Force constante

$$F(y) = F$$

Aire variable

$$A(y) = 10 \cdot b$$



Barre à section variable – Exemple

Exemple: Déterminer l'elongation ϵ

$$A(y) = (10)(b)$$

or $b = 20 - \frac{10}{3} y$

$$A = 200 - \frac{3}{2} \frac{100}{3} y \text{ (mm}^2\text{)}$$

$$e = \int_0^L \frac{F}{EA(y)} dy$$

NOTE: $\frac{d}{3}$ ratio de
proportion sans
dimension
1 du (m/m)

$$= \frac{F}{E 10^{-6}} \int_2^3 \left(\frac{1}{200 - \frac{100y}{3}} \right) dy$$

pour
aire

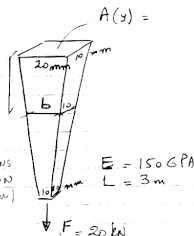
$$2m^2$$

$$= \frac{20 \times 10^3}{150 \times 10^9 (10^{-6})} \int_0^3 \frac{1}{(200 - \frac{100}{2}y)} dy$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \Big|_0^3 \quad \text{avec } a = -\frac{100}{3} \quad b = +200$$

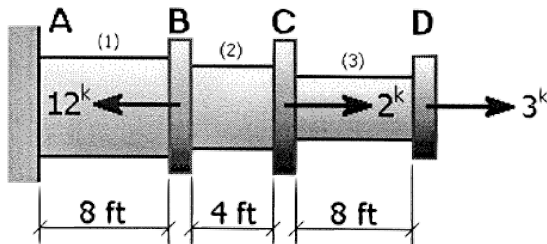
$$\Rightarrow \left[-\frac{3}{100} \ln \left(-\frac{100}{3} (3) + 200 \right) \right] - \left[-\frac{3}{100} \ln (200) \right] = 0.0207$$

$$C = \frac{20 \times 10^{-3}}{150 \times 10^9 (10^{-6})} (0.0207) = 2.76 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.76 \text{ mm}$$



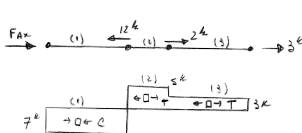
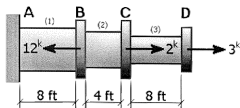
Barre segmentée – Exemple (MDS 3.1)

Calculer les déplacements aux sections B, C & D



- ▶ $E_1 = E_2 = 10\,000\text{ ksi}$, $E_3 = 16\,500\text{ ksi}$
- ▶ $L_1 = L_3 = 8\text{ ft}$, $L_2 = 4\text{ ft}$
- ▶ $A_1 = 1.75\text{ in}^2$, $A_2 = 0.5\text{ in}^2$, $A_3 = 0.25\text{ in}^2$

Barre segmentée – Exemple (MDS 3.1)



$$\begin{aligned} \rightarrow + \\ \bullet \sum F_x = 0 \\ F_{Ax} - 12 + 2 + 3 = 0 \\ F_{Ax} = +7 \text{ kips} \end{aligned}$$

• Diagramme des efforts axiaux

• Pour chaque segment $e_i = \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$

• $\delta_B = e_1$; $\delta_C = e_1 + e_2$; $\delta_D = e_1 + e_2 + e_3$

• $e_1 = \frac{(7^k)(8 \times 12)}{(1.75)(10,000)} = -0.0384 \text{ in}$; $\frac{\text{kips} \cdot \text{in}}{\text{in}^2 \left(\frac{\text{kips}}{\text{in}^2} \right)} = \text{in}$

• $e_2 = \frac{(5^k)(4 \times 12)}{(0.5)(10,000)} = +0.048 \text{ in}$; $e_3 = \frac{(3^k)(8 \times 12)}{(0.25)(16,500)} = 0.0698 \text{ in}$

$\delta_B = -0.0384 \text{ in}$

$\delta_C = (-0.0384) + (0.048) = 0.0096 \text{ in}$

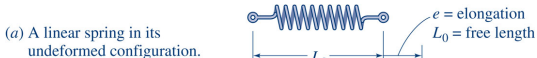
$\delta_D = (-0.0384) + (0.048) + (0.0698) = 0.0794 \text{ in}$

Ressorts linéaires

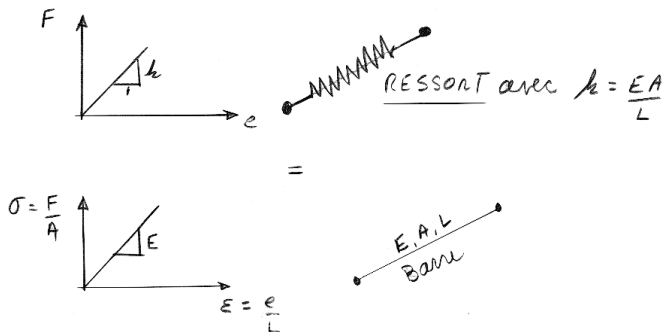
Pour allonger un ressort d'une longueur e , on doit appliquer une force égale à

$$F = ke$$

k : Constante de rigidité du ressort
[force/allongement]



Comparaison barres v.s. ressorts



$$\left. \begin{aligned} F &= k \cdot e \\ \sigma \cdot A &= k \cdot (\epsilon \cdot L) \\ \sigma \cdot A &= k \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot L \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= \frac{EA}{L} \\ e &= \frac{F}{k} = \frac{FL}{AE} \end{aligned}$$

Coefficients de flexibilité et de rigidité – barres uniformes

Flexibilité (f): Allongement causé par l'application d'une force unitaire [m/kN , in/lbs , ...]

$$e = \frac{FL}{EA} = \underbrace{\left[\frac{L}{EA} \right]}_f F = fF$$

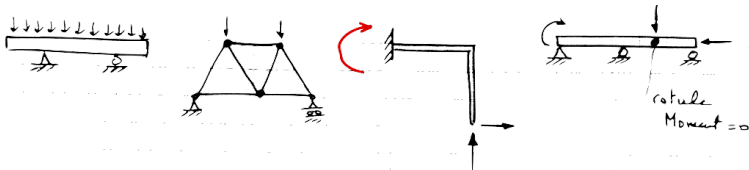
$$f = \frac{L}{EA}$$

Rigidité (k): Force nécessaire pour allonger d'une unité [kN/m , lbs/in , ...]

$$e = fF \rightarrow F = \frac{e}{f} \rightarrow k = \frac{1}{f}$$

$$k = \frac{EA}{L}$$

Structures isostatiques (rappel)

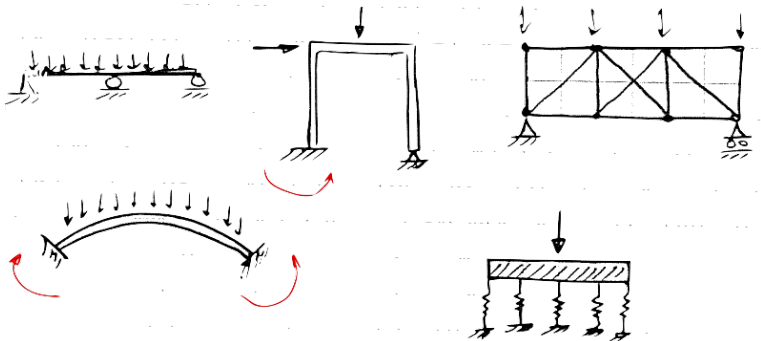


- Nombre d'équations d'équilibre $\geq$ Nombre d'inconnus

$$\sum F_{x,y,z} = 0, \sum M_{x,y,z} = 0$$

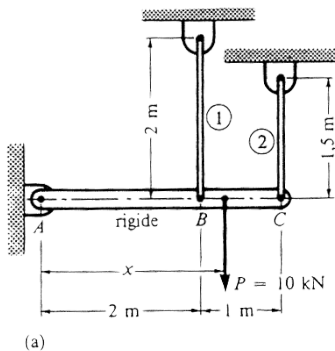
- Structures isostatiques: une coupe entraine l'effondrement
- Les propriétés E et A **n'influencent pas** la distribution des efforts et réactions d'appuis
- Les propriétés E et A **influencent** les contraintes et les flèches

Structures hyperstatiques



- ▶ Structures hyperstatiques: une coupure n'entraîne **pas** l'effondrement
- ▶ Nombre d'équations d'équilibre < Nombre d'inconnus
- ▶ En plus des équations d'équilibre on doit considérer
 ▶ **Compatibilité des déplacements**

Structure hyperstatique – Exemple



- ▶ $x = 2.5 \text{ m}$
- ▶ $P = 10 \text{ kN}$
- ▶ $E = 200\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $A_1 = 400 \text{ mm}^2$
- ▶ $A_2 = 500 \text{ mm}^2$
- ▶ $F_1 = ?$
- ▶ $F_2 = ?$

$$\left. \begin{aligned}
 \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x &= 0 \rightarrow 0 = 0 \\
 \overset{+}{\uparrow} \sum F_y &= 0 \rightarrow R_a - 10 \text{ kN} + R_1 + R_2 = 0 \\
 \overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_z &= 0 \rightarrow 2R_1 + 3R_2 - 2.5 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ équations} \\ 3 \text{ inconnus} \end{array}$$

[Bazergui, 2002]

Stratégie pour résoudre les problèmes hyperstatiques

Méthode des forces

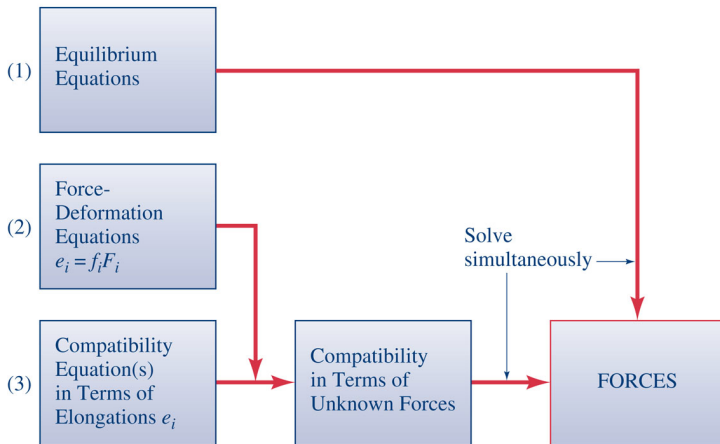
1. Équations d'équilibre
2. Écrire les éq. force-déplacement pour chaque élément

$$e_i = f_i F_i \quad \text{où} \quad f_i = \frac{L_i}{A_i E_i} \quad (\text{Coefficient de flexibilité})$$

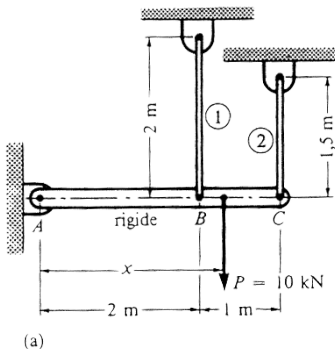
3. Écrire les éq. de compatibilité des déplacements
4. Substituer les e_i (étape 2) dans les éq. de compatibilité (étape 3)
5. Substituer le résultat (étape 4) dans les équations d'équilibre (étape 1) pour calculer les forces inconnues
6. Calculer les déplacements en substituant les forces (étape 5) dans les éq. force-déplacement (étape 2)

Méthode des forces

BASIC FORCE METHOD



Structure hyperstatique – Exemple (cont.)

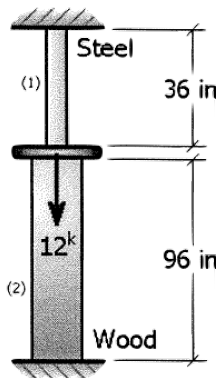


- ▶ $x = 2.5 \text{ m}$
- ▶ $P = 10 \text{ kN}$
- ▶ $E = 200\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $A_1 = 400 \text{ mm}^2$
- ▶ $A_2 = 500 \text{ mm}^2$
- ▶ $F_1 = ?$
- ▶ $F_2 = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ \overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \rightarrow R_a - 10 \text{ kN} + R_1 + R_2 = 0 \\ \circlearrowleft \sum M_z = 0 \rightarrow 2R_1 + 3R_2 - 2.5 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ équations} \\ 3 \text{ inconnus} \end{array}$$

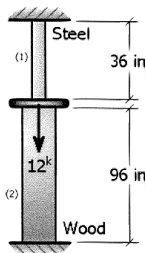
[Bazergui, 2002]

Structure hyperstatique – Exemple II (MDS 3.4)



- ▶ $E_1 = 20\,000\text{ ksi}$
- ▶ $E_2 = 1\,900\text{ ksi}$
- ▶ $A_1 = 0.5\text{ in}^2$
- ▶ $A_2 = 16\text{ in}^2$
- ▶ $\sigma_1 = ?, \sigma_2 = ?$
- ▶ $e_1 = ?, e_2 = ?$

Structure hyperstatique – Exemple II (MDS 3.4)



• DCL DE LA PLAQUE :



$$\bullet \sum F_y = 0 \quad F_1 - F_2 - 12 = 0$$

$$\bullet e_1 = (F_1 L_1) / (A_1 E_1) \quad e_2 = (F_2 L_2) / (A_2 E_2)$$

• Équation de compatibilité $e_1 + e_2 = 0$ car la barre est encastree et ne change pas de longueur totale: $e_1 = -e_2$

$$\bullet (F_1 L_1) / (A_1 E_1) + (F_2 L_2) / (A_2 E_2) = 0 \quad \frac{F_1 (36)}{(0.5)(29000)} + \frac{F_2 (96)}{(16)(1900)} = 0$$

$$F_1 (2.4827 \times 10^{-3}) + F_2 (3.1578 \times 10^{-3}) = 0$$

$$F_1 = -F_2 (1.2719)$$

• Dans l'Équation d'équilibre: $\sum F_y = 0$

$$(-F_2 \cdot 1.2719) - F_2 - 12 = 0$$

$$F_2 = \frac{+12}{-2.2719} = -5.28 \text{ kips}$$

$$F_1 = -(-5.28)(1.2719) = +6.72 \text{ kips}$$

Contraintes et dilatations thermiques

Déformations thermiques: $\epsilon_T = \alpha \Delta T$

Allongements thermiques $e_T = \epsilon_T L$

Principe de superposition: Pour les structures ayant un comportement **linéaire élastique** (loi de Hooke), on peut **superposer (additionner) l'effet des chargements**

Déformations thermomécaniques

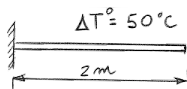
$$\epsilon = \epsilon_\sigma + \epsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Déplacements thermomécaniques

$$e = \frac{FL}{AE} + \epsilon_T L = fF + \alpha \Delta T L$$

σ_T et ϵ_T – Structures isostatiques

- ▶ Les variations de température induisent des déformations et déplacements
- ▶ Les efforts internes sont nuls



$$\begin{aligned}
 e_T &= \alpha \Delta T L \\
 &= 23 \times 10^{-6} / ^\circ C \cdot 50 ^\circ C \cdot 2000 \text{ mm} \\
 &= 2.3 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

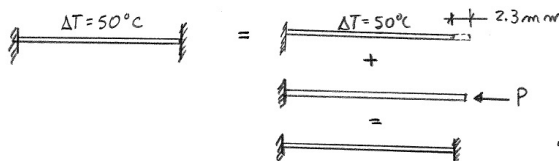
- ▶ $E = 70\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $\alpha = 23 \times 10^{-6} / ^\circ C$
- ▶ $A = 100 \text{ mm}^2$

$$\sigma_T = 0$$

- ▶ $e_T = ?$, $\sigma_T = ?$

σ_T et ϵ_T – Structures hyperstatiques

- Les variations de température induisent des déformations, déplacements* et efforts internes



► $E = 70\,000\text{ MPa}$

► $\alpha = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

► $A = 100\text{ mm}^2$

► $L = 2000\text{ mm}$

► $e_T = ?$, $\sigma_T = ?$

$$e_T = 0$$

$$e_P = \frac{PL}{AE} = \frac{P \cdot 2000\text{ mm}}{100\text{ mm}^2 \cdot 70\,000\text{ MPa}} = -2.3\text{ mm} \rightarrow P = -8050\text{ N}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{-8050\text{ N}}{100\text{ mm}^2} = -80.5\text{ MPa}$$

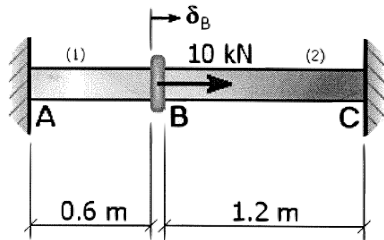
$$\sigma = -E\alpha\Delta T = -70\,000\text{ MPa} \cdot 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \cdot 50^\circ\text{C} = -80.5\text{ MPa}$$

σ_T et ϵ_T – Exemples 🎥



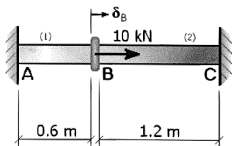
[Google images, acoustiblok.com]

Dilatation thermique – Exemple (MDS 3.7)



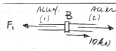
- ▶ $E_1 = 68\,900 \text{ MPa}$
- ▶ $E_2 = 200\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $A_1 = A_2 = 300 \text{ mm}^2$
- ▶ $\alpha_1 = 23.4 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
- ▶ $\alpha_2 = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
- ▶ $\Delta T_1 = 40 ^\circ\text{C}$
- ▶ $\Delta T_2 = 0 ^\circ\text{C}$
- ▶ $\delta_B = ?, \sigma_1 = ?, \sigma_2 = ?$

Dilatation thermique – Exemple (MDS 3.7)



- ▶ $E_1 = 68\,900 \text{ MPa}$
- ▶ $E_2 = 200\,000 \text{ MPa}$
- ▶ $A_1 = A_2 = 300 \text{ mm}^2$
- ▶ $\alpha_1 = 23.4 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
- ▶ $\alpha_2 = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
- ▶ $\Delta T_1 = 40^\circ\text{C}$
- ▶ $\Delta T_2 = 0^\circ\text{C}$
- ▶ $\delta_B = ?$, $\sigma_1 = ?$, $\sigma_2 = ?$

• DCL DE LA CONNECTION à B :



• Équation d'équilibre :

$$\sum F_H = 0 \quad -F_1 + F_2 + 10\,000 = 0$$

• Équations force - Température - déplacement : (N-mm)

$$e = \frac{FL}{AE} + \alpha \Delta T L \quad : \quad e_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} + \alpha_1 \Delta T_1 L_1$$

$$e_1 = \frac{F_1 (600)}{(300)(68.9 \times 10^3)} + (23.4 \times 10^{-6})(40^\circ\text{C})(600)$$

$$e_1 = F_1 (2.90275 \times 10^{-5}) + 0.5616$$

$$e_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} = \frac{F_2 (1200)}{(300)(200 \times 10^3)} = F_2 (2.0 \times 10^{-5})$$

• Équation de compatibilité : $e_1 + e_2 = 0$

$$F_1 (2.90275 \times 10^{-5}) + 0.5616 + F_2 (2.0 \times 10^{-5}) = 0$$

$$F_2 = \frac{-0.5616 - F_1 (2.90275 \times 10^{-5})}{2.0 \times 10^{-5}} = -28\,080 \text{ N} - F_1 (1.45137)$$

• Substitution dans l'équation d'équilibre

$$-F_1 + (-28\,080 \text{ N}) = -F_1 (1.45137) + 10\,000 \text{ N} = 0$$

$$F_1 = \frac{-10\,000 + (28\,080)}{-2.45137} = -7\,375.5 = -7.375 \text{ kN}$$

$$= -7.375 \text{ kN}$$

$$F_2 = -28\,080 + (7\,375.5)(1.45137) = -17\,375.4 = -17.38 \text{ kN}$$

• Contraintes : $\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{-7\,375.5 \text{ N}}{300 \text{ mm}^2} = -24.58 \text{ MPa Comp.}$

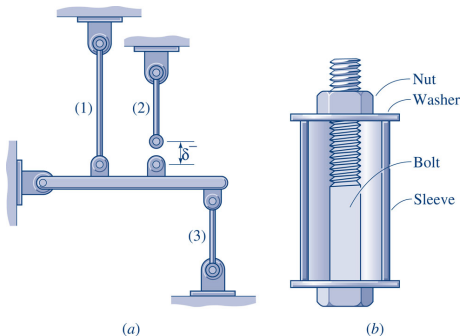
$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{-17\,380}{300} = -57.93 \text{ MPa comp.}$$

• Déplacement du point B :

$$e_2 = \delta_B = F_2 (2.0 \times 10^{-5}) = (-17\,375.4)(2.0 \times 10^{-5}) = 0.348 \text{ mm}$$

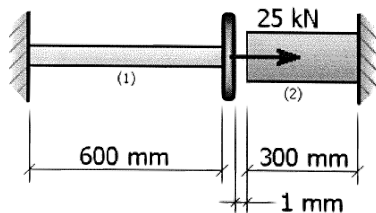
Définition

Misfit = Écart géométrique = “Jeu”



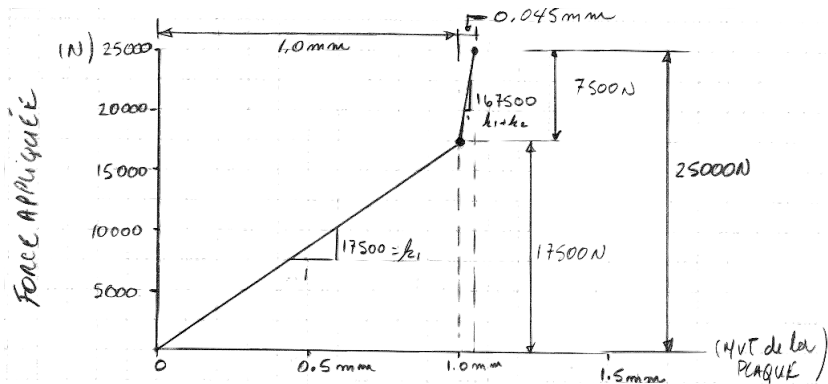
L'écart géométrique doit être inclus dans les équations de **compatibilité géométrique**

Écart géométrique – Exemple (MDS 3.10)



- ▶ $E_1 = 70\,000\text{ MPa}$
- ▶ $E_2 = 100\,000\text{ MPa}$
- ▶ $A_1 = 150\text{ mm}^2$
- ▶ $A_2 = 450\text{ mm}^2$
- ▶ $\delta = 1\text{ mm}$
- ▶ $\sigma_1 = ?$, $\sigma_2 = ?$, $e_1 = ?$

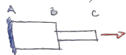
Écart géométrique – Exemple (MDS 3.10)



Compatibilité des déplacements

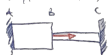
$$e_i = \delta(L) - \delta(0)$$

CAS I
(isostatique)



$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_B &= e_{AB} \\ \delta_C &= e_{AB} + e_{BC}\end{aligned}$$

CAS II
(Hyperstat. g.in.)



$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_B &= e_{AB} = -e_{BC} \\ \delta_C &= 0 \\ e_{AB} + e_{BC} &= 0 = \delta_g \\ \text{compatibilité}\end{aligned}$$

CAS III
(contact Hyp)



$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_B &= e_{AB} \\ \delta_C &= e_{AB} + e_{BC} = \delta_g \\ \text{compatibilité}\end{aligned}$$

CAS IV
(contact Hyp)



$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_B &= e_{AB} \\ \delta_C &= 0 \\ \delta_{B'} &= -e_{B'C} \\ e_{AB} + e_{B'C} &= \delta_g \\ \text{compatibilité}\end{aligned}$$

CAS V
(contact Hyp)



$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_B &= e_{AB} \\ \delta_{B'} &= -e_{B'C} \\ e_{AB} + e_{B'C} &= \delta_g \\ \text{compatibilité}\end{aligned}$$

CAS VI
(contact Hyp)



$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_B &= e_1 = e_2 \\ \text{compatibilité}\end{aligned}$$

Méthode des forces v.s. méthode des déplacements

Méthode des forces, on exprime pour chaque membrure l'allongement e causé par une force F .

$$e_i = f_i F_i = \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$$

Méthode des déplacements, on exprime pour chaque membrure la force F causée par un l'allongement e .

$$F_i = k_i e_i = \frac{e_i A_i E_i}{L_i}$$

Méthode des déplacements - Méthodologie

1. DCL et éq. d'équilibre (1 éq. par degré de liberté)

$$\sum F_{x,y,z} = 0, \sum M_{x,y,z} = 0$$

2. Éq. force-température-déplacement

$$F_i = k_i(e_i - \alpha_i \Delta T_i L_i), \quad k_i = A_i E_i / L_i$$

3. Compatibilité des déformations

→ déplacements en fonction des allongements e_i

4. Substituer les éq. (étape 3) dans l'éq (étape 2)

→ forces en fonction des déplacements

5. Substituer les éq. (étape 4) dans les éq (étape 1)

→ éq. équilibre en fonction des déplacements inconnus

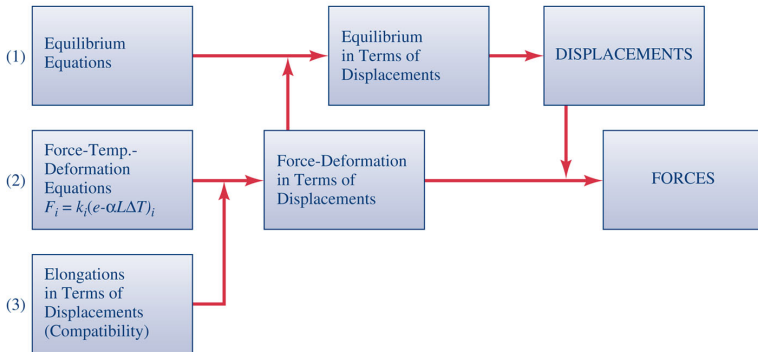
6. Résoudre le système d'éq. d'équilibre

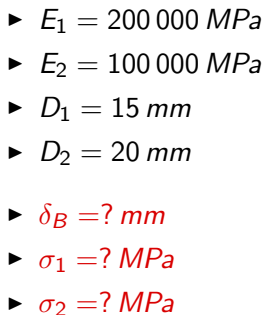
→ **déplacements**

7. Substituer les déplacements dans les éq. (étape 4) → **forces**

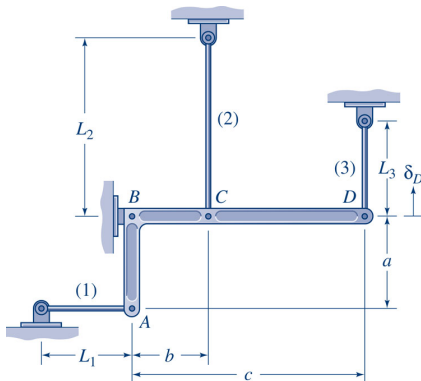
Méthode des déplacements

DISPLACEMENT METHOD





Méthode des déplacements - exemple



- ▶ $E_1 = E_2 = E_3 = 70\,000\text{ MPa}$
- ▶ $A_1 = A_2 = A_3 = 1\,000\text{ mm}^2$
- ▶ $L_1 = L_3 = 1250\text{ mm}$
- ▶ $L_2 = 2000\text{ mm}$
- ▶ $a = 1250\text{ mm}$
- ▶ $b = 1000\text{ mm}$
- ▶ $c = 2500\text{ mm}$
- ▶ $\Delta T_3 = -50^\circ\text{C}$

- ▶ $F_1 = ?\text{ N}$
- ▶ $F_2 = ?\text{ N}$
- ▶ $F_3 = ?\text{ N}$

Méthode des déplacements - Notation matricielle

$$[K][D] = [Q]$$

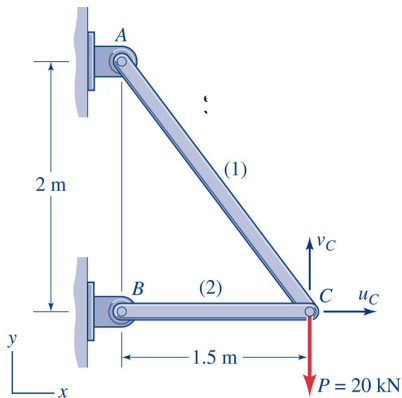
$$[K]^{-1}[Q] = [D]$$

Pour N degrés de liberté

- ▶ $[K]_{N \times N} :=$ matrice de rigidité
- ▶ $[D]_{N \times 1} :=$ vecteur déplacements (Déplacement des DDL)
- ▶ $[Q]_{N \times 1} :=$ vecteur charges externes (action sur les DDL)

Méthode derrière les logiciels d'analyse des structures – CIV3510

Déplacements dans les treillis (un seul noeud)

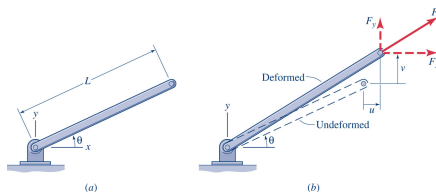


$$A_1 = 1000 \text{ mm}^2, E_1 = 200 \text{ GPa}, \alpha_1 = 20(10^{-6})/^{\circ}\text{C}$$

$$A_2 = 1000 \text{ mm}^2, E_2 = 100 \text{ GPa}$$

- $\Delta_{T,AC} = -20^{\circ}\text{C}$
- $u_C = ?$
- $v_C = ?$

Déplacements dans les treillis (un seul noeud)



Éq. force-température-déplacement

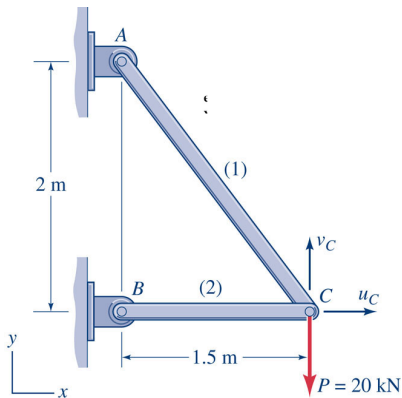
$$F_i = k_i(e_i - \alpha_i \Delta T_i L_i), \quad k_i = \frac{A_i E_i}{L_i}$$

$$e_i = f_i F_i + \alpha_i \Delta T_i L_i, \quad f_i = \frac{L_i}{A_i E_i}$$

Géométries des déformations

$$e = e_u + e_v = u \cos \theta + v \sin \theta$$

Déplacements dans les treillis – exemple



► $\Delta_{T,AC} = -20^\circ\text{C}$

► $u_C = ?$

► $v_C = ?$

$A_1 = 1000 \text{ mm}^2, E_1 = 200 \text{ GPa}, \alpha_1 = 20(10^{-6})/^\circ\text{C}$

$A_2 = 1000 \text{ mm}^2, E_2 = 100 \text{ GPa}$

Résumé – Module #3

Déformation axiale :

$$\left. \begin{array}{l} e = fF \\ F = ke \end{array} \right\} f = \frac{L}{AE} = \frac{1}{k}$$



Changement de température :

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

Principe de superposition : $\epsilon = \epsilon_\sigma + \epsilon_T$

Structures iso. : $\epsilon \neq 0, \sigma = 0$

Structures hyp. : $\epsilon \neq 0, \sigma \neq 0$

Structures hyperstatiques :

Équations supplémentaires → compatibilité des déformations

Méthode des forces : $e_i = f_i F_i$

Méthode des déplacements : $F_i = k_i e_i$

Organisation de la matière

- 1

Statique

{

 - Équilibre des forces et moments
 - Diagrammes de corps libres 
 - 5

 Diagramme des efforts, $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

- 2

Matériau

{

 - Contraintes & déformations
 - Loi de Hooke, Poisson & St-Venant 

- Chargements**

{

 - 3

 Efforts axiaux 
 - 4

 Torsion 
 - 6a

 Flexion 
 - 6b

 Cisaillement 
 - 7

 Déflexion 
 - 9

 Pression & chargements combinés 

- États limites**

{

 - 7

 Déflexion 
 - 8

 Contraintes 2D-3D 
 - 10

 Lois constitutives & critères de rupture 