

# Module #1

## Introduction

(CIV1150 - Résistance des matériaux)

Enseignant: James-A. Goulet

Département des génies civil, géologique et des mines  
Polytechnique Montréal



Sections 1.1-1.4 – R. Craig (2011)  
*Mechanics of Materials*, 3rd Edition  
John Wiley & Sons.

Sections 1.1-1. – P. Léger (2006)  
*Notes de cours: Chapitre 1 – Introduction à la RDM*  
Polytechnique Montréal.



# Qu'est-ce que la résistance des matériaux?

## Tous les matériaux sont déformables

Contexte: Analyses statiques

Sollicitations: forces & changements de températures

But: comprendre et contrôler ces déformations afin d'obtenir des structures **sécuritaires et aptes au service**

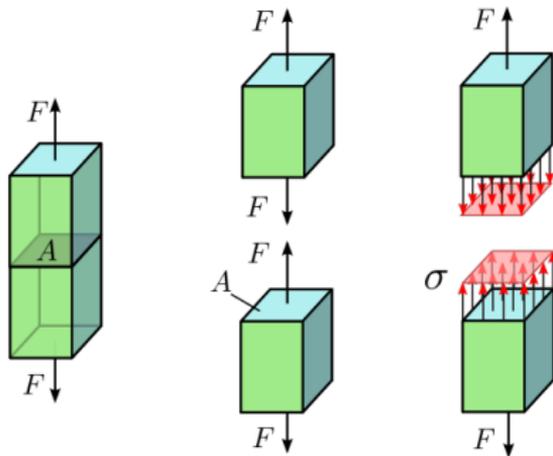
### Synonymes:

- ▶ mécanique des matériaux
- ▶ mécanique des solides
- ▶ théorie des poutres

# Sécurité et aptitude au service

## La résistance d'un élément dépend du mécanisme de défaillance

- Contrainte maximale ( $\sigma_{adm.}$ ):  $\sigma = \frac{F}{A}$



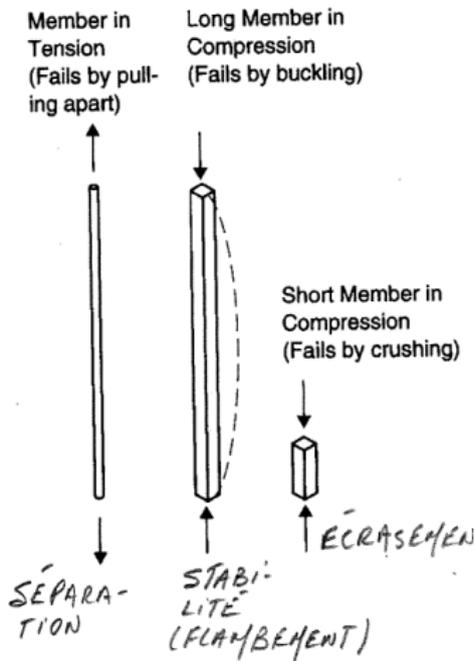
Force = masse × accélération

$$\underbrace{1 \text{ N}} = \underbrace{1 \text{ kg}} \cdot \underbrace{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

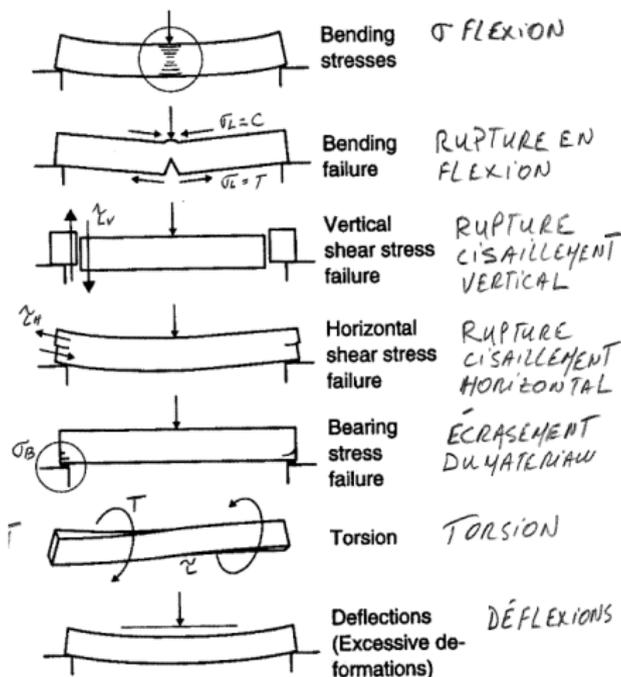
# Les facteurs qui influencent la capacité d'une structure

- ▶ Résistance  
Supporter et transmettre les charges
- ▶ Rigidité  
Éviter les déformations excessives
- ▶ Stabilité  
Conserver l'intégrité géométrique
- ▶ Endurance (Fatigue)  
Supporter de multiples cycles de chargement
- ▶ Ductilité (Résilience)  
Déformation au-delà de la limite élastique sans rupture fragile

# Mécanismes de défaillance – Chargements axiaux

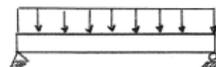


# Mécanismes de défaillance – Chargements transversaux



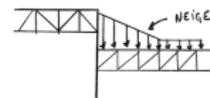
# Sollicitations statiques

Poids propre (Charge morte)

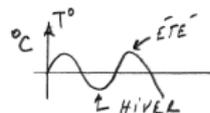


Surcharge (Charge vive)

- ▶ occupation
- ▶ neige & glace
- ▶ équipements



Effets thermiques



Pression due aux liquides (vent)

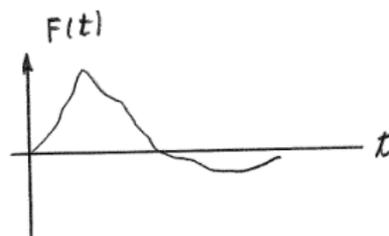


Tassement différentiels



# Sollicitations dynamiques

- ▶ Vibration des machines
- ▶ Tremblement de terre
- ▶ Explosion/impacts
- ▶ Dynamitage

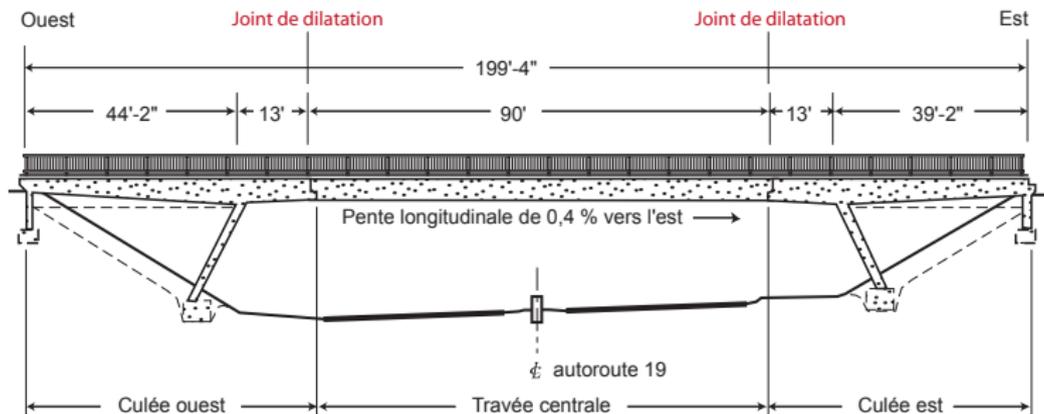


# Rupture en cisaillement-flexion



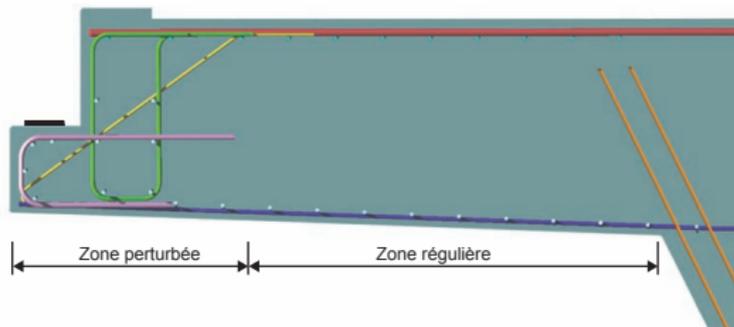
**Qu'est-ce qui explique l'orientation de la fissure?**

# Rupture en cisaillement-flexion



**Qu'est-ce qui explique l'orientation de la fissure?**

# Rupture en cisaillement-flexion



**Qu'est-ce qui explique l'orientation de la fissure?**

# Rupture en cisaillement-flexion



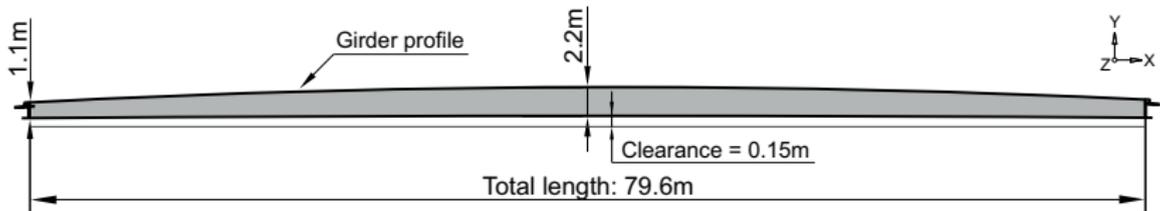
**Qu'est-ce qui explique l'orientation de la fissure?**

# Rupture par poinçonnement



**Comment calculer la résistance au poinçonnement??**

# Conception gouvernée par la flèche - Lucerne, Suisse



**Élancement :  $L/36$  Est-ce que les trains pourront passer en tout temps?**

# Plan de cours – disponible sur



## PLAN DE COURS CIV1150 – Résistance des matériaux

Automne 2016

Département CGM - Polytechnique Montréal

---

Crédits	3cr (3-1.5-4.5)
Horaire cours	Mardi, 12-45 – 15:35
Horaire TD	Mercredi, 14-45 – 17:35 (B1)
Locaux	M-1010 (cours), A-416 (TD)
Préalable	MEC1010 & (CIV1140 ou MTR1035)
Professeur	James-A. Goulet (bureau B-431.1.6)
Disponibilité	Mardi, 15:45 – 17:45

---

### 1 Description de l'annuaire

Calcul des efforts internes dans les structures isostatiques. Diagrammes de corps libres et réactions d'appuis. Étude de l'effort normal et des déformations axiales : contraintes normales, loi de Hooke 1D, déformations axiales, compatibilité des déformations et effets des variations de température. Efforts et déformations de flexion : contraintes normales, déformations longitudinales et courbure, calcul des déformations des poutres en flexion. Effort tranchant et contraintes de cisaillement. Torsion uniforme des pièces à sections pleines et fermées. État de contraintes 2D : Loi de Hooke généralisée, cercle de Mohr et calcul des contraintes principales. Lois constitutives et modes de rupture : critère de Von Mises, fracture, fatigue, instabilité, notions de sécurité. État de contraintes 3D : Notations tensorielles et cercle de Mohr.

### 2 Objectifs

L'objectif principal du cours est de présenter aux étudiants les concepts fondamentaux qui servent à l'analyse structurale et la conception des ouvrages de génie civil (calculs des efforts internes causés par les chargements externes, calcul des contraintes, des déformations et des déplacements).

1. Présenter à l'étudiant une approche fondamentale permettant d'évaluer les efforts internes induits dans les corps déformables, lorsque soumis à des forces et moments externes.
2. Permettre à l'étudiant de comprendre les méthodes de solution appliquées à des problèmes simples de corps déformables soumis aux chargements fondamentaux en mettant l'accent sur les poutres droites en tension/compression, en flexion et en torsion.

# Horaire

Crédits	3cr (3-1.5-4.5)
Horaire cours	Mardi de 12h45 à 15h35
Horaire TD	Mercredi de 14h45 à 17h35
Local	M-1010
Disponibilité	<b>mardi 15:45-17:45</b>

# Objectifs

**Objectif principal:** présenter les concepts fondamentaux qui servent à l'analyse et la conception des ouvrages de génie civil

**Objectif spécifiques:**

1. Calculer les efforts internes causés par des forces et moments externes 
2. Comprendre les notions de contraintes et déformations 2D et 3D dans les solides & poutres
3. Spécifier les limites d'utilisation des matériaux selon les critères de défaillance, ex : 
4. Comprendre les mécanismes par lesquels un ouvrage peut résister de façon sécuritaire aux charges appliquées
5. Résoudre des problèmes de manière structurée

# Objectifs & organisation de la matière

- |                      |                 |   |  |  |
|----------------------|-----------------|---|--|--|
| 1                    | <i>Statique</i> | { | - Équilibre des forces et moments  |  |
|                      |                 |   | - Diagrammes de corps libres                    |  |
|                      |                 |   | - 5 Diagramme des efforts, $N(x)$ , $V(x)$ , $M(x)$  |  |
|                      |                 |   |  |  |
| 2                    | <i>Matériau</i> | { | - Contraintes & déformations   |  |
|                      |                 |   | - Loi de Hooke, Poisson & St-Venant             |  |
|                      |                 |   |  |  |
| <i>Chargements</i>   |                 | { | - 3 Efforts axiaux                              |  |
|                      |                 |   | - 4 Torsion                                     |  |
|                      |                 |   | - 6a Flexion                                    |  |
|                      |                 |   | - 6b Cisaillement                               |  |
|                      |                 |   | - 7 Déflexion                                   |  |
|                      |                 |   | - 9 Pression & chargements combinés            |  |
|                      |                 |   |  |  |
| <i>États limites</i> |                 | { | - 7 Déflexion                                   |  |
|                      |                 |   | - 8 Contraintes 2D-3D                           |  |
|                      |                 |   | - 10 Lois constitutives & critères de rupture  |  |

# Évaluation

1. Travaux pratiques (5): 20%
2. Examen partiel: 35% (Mardi 20 octobre)  
(aide mémoire: 1 feuille 8.5" x 11" recto verso)
3. Examen final: 45%  
(aide mémoire: 2 feuilles 8.5" x 11" recto verso)

**Absence à l'examen partiel → note du final = 80%**

**Absence à l'examen final → examen oral/écrit**

# Travaux pratiques

- ▶ 5 travaux pratiques (TP1 déjà sur **moodle**)
- ▶ Remette une copie par équipe de 3 **(min)** ou 4 **(max)** personnes
- ▶ Fournir une solution complète pour chaque problème (pas de solution = pas de points)
- ▶ Plagiat : note = 0 & dossier transmit à la direction

**Remise des TP au plus tard le vendredi 15:45  
dans les boîtes devant le local B-342**

# Documentation, site web & logiciel

## Document obligatoire :

1. Notes de cours: Léger, P., *CIV1150 Résistance des Matériaux*, Disponible sur [moodle](#)
2. Ouvrage de référence: Craig, R.R., *Mechanics of Materials*, 2e ou 3e édition, John Wiley & Sons, 2000/2011  
Disponible à la librairie

**Diapositives** : en ligne sur [moodle](#)

**Questions de révision** : en ligne sur [moodle](#)

**Logiciel** : Le logiciel MDSolids est fourni avec le livre de Craig (Annexe G) et disponible sur [moodle](#)

# Contenu du cours

Semaine	Cours – Théorie et applications	Chap. PL	Section Craig
1	a) Introduction à la résistance des matériaux b) Types de structures, efforts internes F, M, V, DCL et réactions pour les systèmes isostatiques. Analyse des structures isostatiques.	Ch.1	1.1-1.4
2	Matériaux – résistance mécanique, contraintes, déformations, loi de Hooke 1D, contraintes sur plans inclinés, Principe de St-Venant.	Ch.2	2.1-2.10
3	a) Loi de Hooke généralisée b) Efforts axiaux et déformations axiales: contraintes normales	Ch.2-3	2.11-2.13 3.1-3.4
4	Efforts axiaux et déformations axiales: effets de $T^0$ , problèmes iso et hyperstatiques	Ch.3	3.5-3.8, 3.11
5	Torsion uniforme des sections pleines et tubulaires	Ch.4	4.1-4.7
6	Équilibre des poutres: diagramme d'efforts internes (V, M)	Ch.5	5.1-5.5 3rd Éd. 5.1-5.4, 2de Éd.
8	Poutres: contraintes normales et déformations dues à la flexion, conception des poutres pour la flexion, flexion inélastique.	Ch.6	6.1-6.4
9	Poutres: efforts tranchants, contraintes et flux de cisaillement.	Ch.6	6.8-6.11
10	Déflexion des poutres par double intégration et par superposition.	Ch.7	7.1-7.4
11	Transformation des contraintes 2D-3D: Formulation analytique.	Ch.8	8.1-8.5
12	Transformation des contraintes 2D-3D: cercle de Mohr et contraintes principales.	Ch.8	8.6-8.11
13	Contenants sous pression; contraintes dues à la combinaison de chargements.	Ch.9	9.1-9.4
14	Lois constitutives et modes de rupture: fracture, fissuration, fatigue, stabilité, critère de Von Mises, notions générales de sécurité.	Ch.10	12.1-12.4, 10.1

**Note: il est possible qu'il y ait des ajustements en fonction de la progression du cours**

# Programme du cours

Semaine	Mois	Date (mardi)	Cours (mardi) Chapitre P.L.	TD (mercredi)	Remise TP (vendredi 15:45)
1	Août	30	1	TD1	
2	Septembre	6	2		
3		13	2-3	TD2	TP1
4		20	3		
5		27	4	TD3	TP2
6	Octobre	4	5		TP3-A*
7		11	Semaine de relâche		
8		18	Contrôle périodique	cours	
9		25	6		
10	Novembre	1	7	TD5	TP3-B
11		8	8		
12		15	8	TD6	TP4
13		22	9		
14		29	10	TD7	TP5
14	Décembre	6	Période d'examens		
16		13			

# Questions

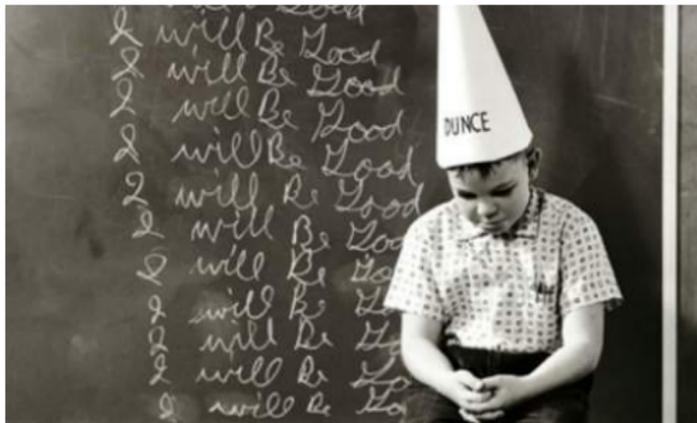


Forum  moodle

# Lectures préparatoires [ 📖 ]



# Comportement en classe



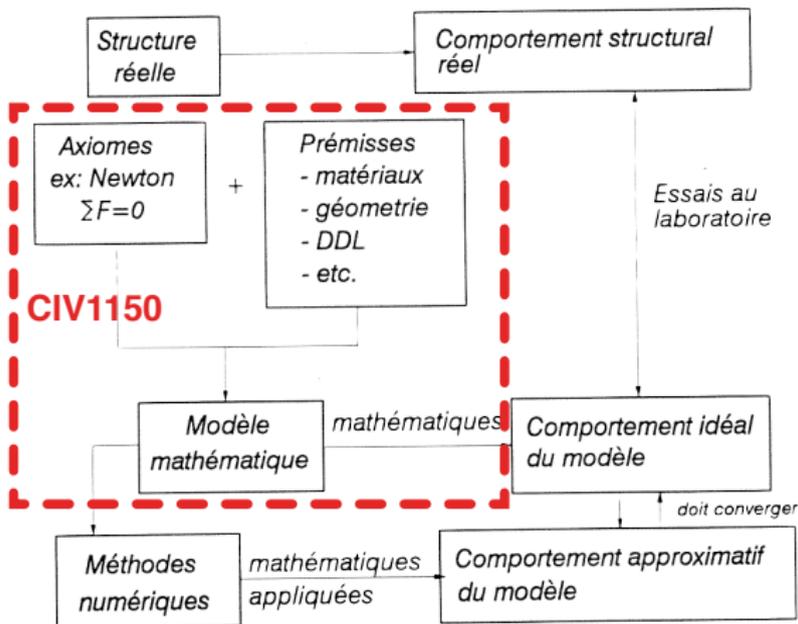
**Vous n'êtes pas tenu de venir en classe**

# Pauses



**(10 min) 13:35, 14:35, 15:35**

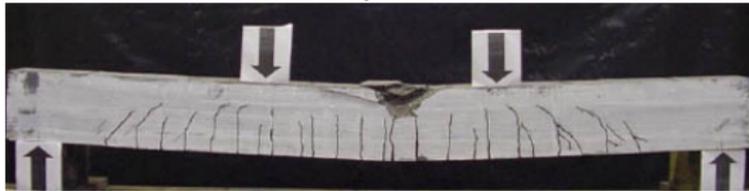
# Comportement des structures



**CIV1150 : élongation, flexion, cisaillement**

# Mécanique des solides – Hypothèses de base

## 1. Matériau continu (pas de fissures ou discontinuités)



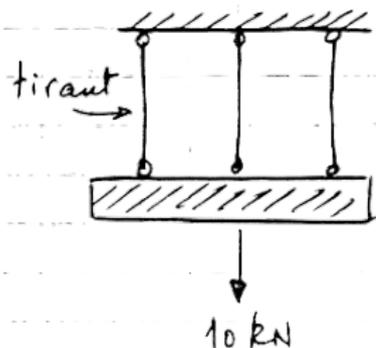
## 3 équations fondamentales

### 1. Équilibre des forces & moments

$$\sum \text{forces} = 0$$

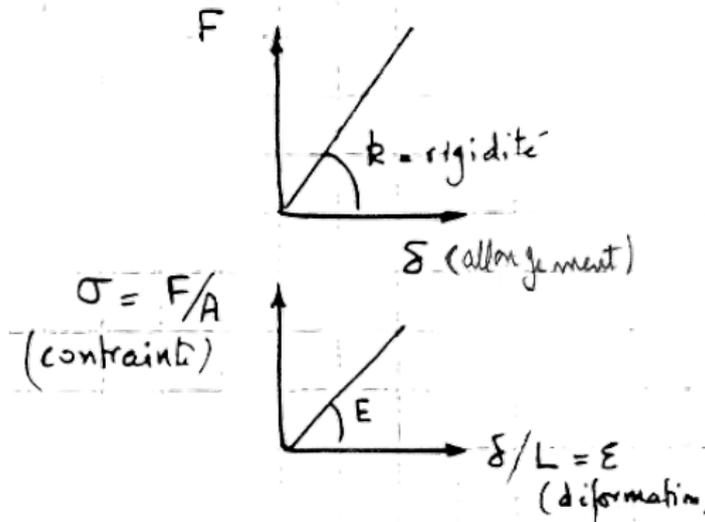
$$\sum \text{moments} = 0$$

### 2. Compatibilité des déformations

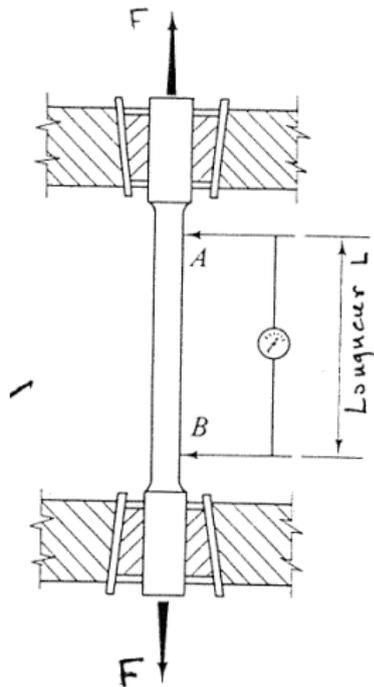


## 3 équations fondamentales (cont.)

### 3. Loi constitutive

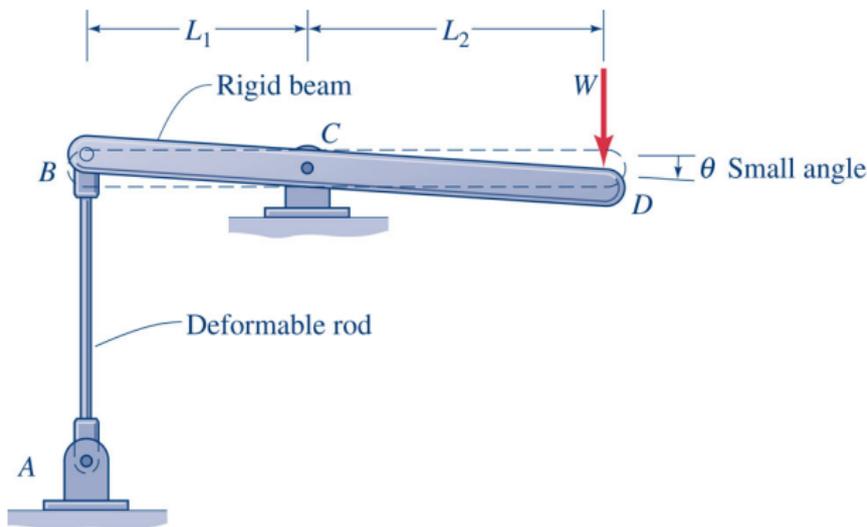


**Pourquoi  $\sigma, \epsilon$ ? → indépendant de la géométrie**



# Équations fondamentales - exemple

**Comment calcule-t-on déplacement au point D?**



# Pieds, pouces, etc... – Pourquoi?

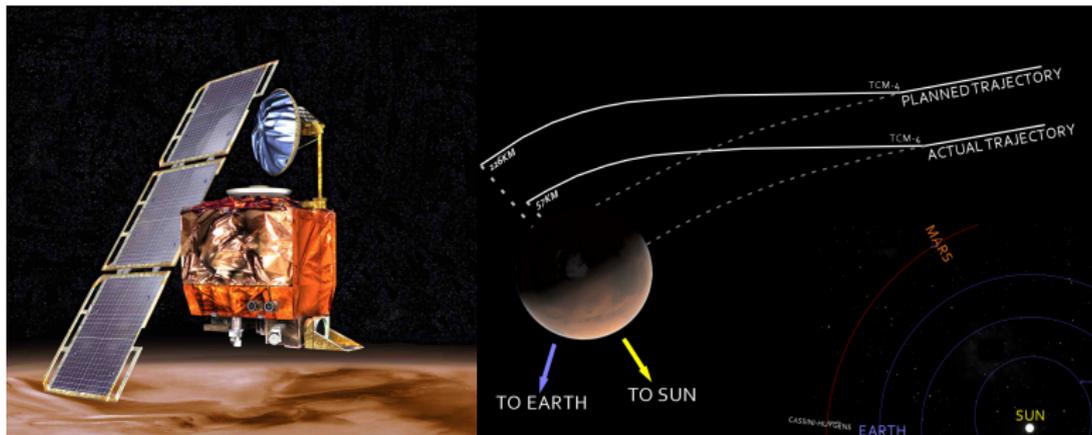
**Seulement 3 pays utilisent encore le système d'unités impérial**

1. Liberia
2. Myanmar
3. États-Unis



[Source: Wikipedia]

## Exemple célèbre - Mars Climate Orbiter (1998)



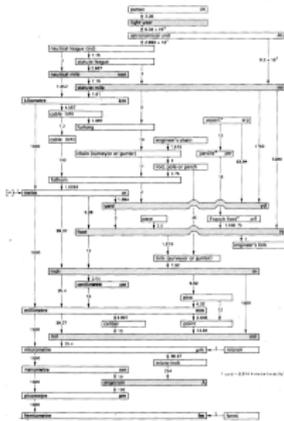
[Source: Wikipedia]

**Message: Attention, il est facile de se tromper!**

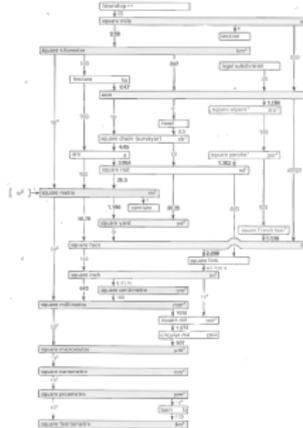
# Pieds, pouces, etc... – Stratégie

1. Résoudre en utilisant les unités impériales
2. Convertir en unités SI

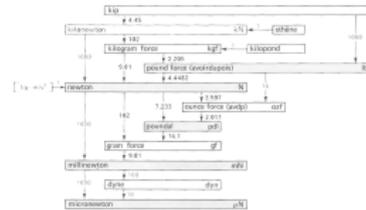
## Longueur



## Aire



## Force



[Source: Wildi, T., Units, 2nd Edition, 1971]

# Unités de base

## SI

- ▶ Dimension :  $mm$
- ▶ Masse :  $kg$
- ▶ Force :  $N = kg \cdot m/s^2$
- ▶ Contrainte :  $MPa = N/mm^2$

## Impérial

- ▶ Dimension :  $in$  (pouce)
- ▶ Masse :  $lb$  (livre masse)
- ▶ Force :  $kips = 1000 lbf = 32170 lb$   
( $1 lbf = 1 lb \cdot 32.17 \frac{ft}{s^2}$ )
- ▶ Contrainte :  $ksi = kips/in^2$



# Méthodologie pour la résolution de problèmes – 4 étapes

## 1. Définition du problème

Données, hypothèses de calcul, figures & résultats attendus

## 2. Planification de la solution

Principes de base, stratégie & équations fondamentales

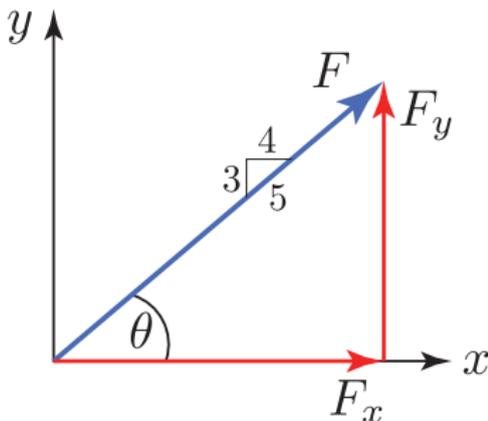
## 3. Effectuer la solution

- ▶ équilibre
- ▶ compatibilité des déformations
- ▶ comportement du matériau

## 4. Vérification de la solution

unités, signes, magnitude (jugement d'ingénieur)

## Décomposition des forces : $F = [F_x, F_y, F_z]$



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

### Angles

$$F_y = F \cdot \sin \theta$$

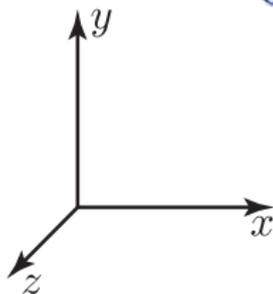
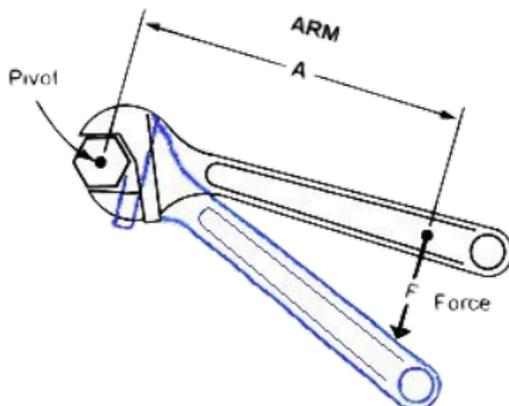
$$F_x = F \cdot \cos \theta$$

### Longueurs relatives

$$F_y = \frac{3}{5} \cdot F$$

$$F_x = \frac{4}{5} \cdot F$$

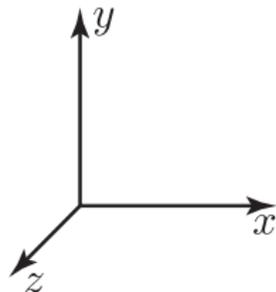
# Moments



$$M = F \cdot d$$

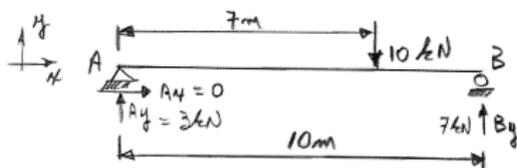


# Équations d'équilibre - 3D: (x,y,z)



	x	y	z
forces:	$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$	$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0$	$\overset{+}{\nearrow} \sum F_z = 0$
moments:	$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_x = 0$	$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_y = 0$	$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_z = 0$

## Exemple – Réactions



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0 \left\{ \begin{array}{l} B_y \cdot 10\text{m} - 10\text{kN} \cdot 7\text{m} = 0 \\ B_y = \frac{10\text{kN} \cdot 7\text{m}}{10\text{m}} = 7\text{kN} \uparrow \end{array} \right.$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \left\{ \begin{array}{l} A_y - 10\text{kN} + 7\text{kN} = 0 \\ A_y = 3\text{kN} \uparrow \end{array} \right.$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \left\{ A_x = 0 \right.$$

$$A_y + B_y = 3\text{kN} + 7\text{kN} = 10\text{kN} \quad \boxed{\text{OK}}$$

## Isostatique v.s. hyperstatique

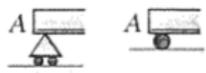
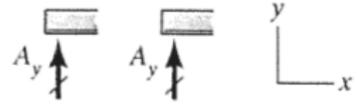
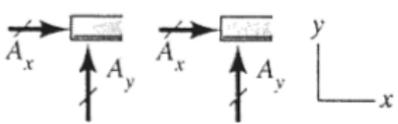
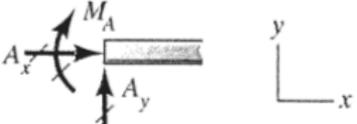
**Isostatique:** nombre d'équations d'équilibre = nombre de forces inconnues



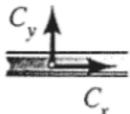
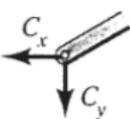
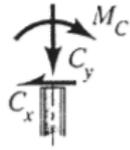
**Hyperstatique:** nombre d'équations d'équilibre < nombre de forces inconnues



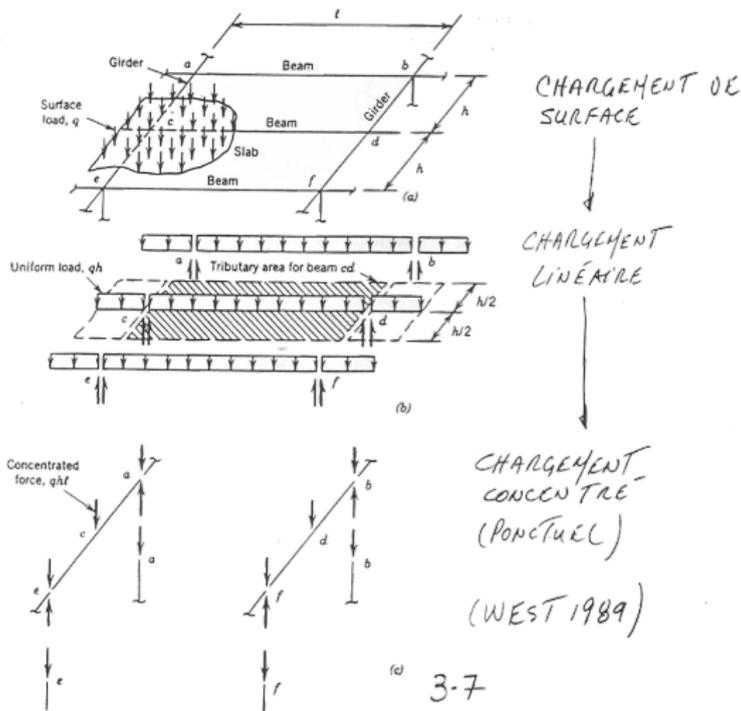
# Appuis - 2D

Description	Symbol	Required Forces/Couples
<b>REACTIONS – 2D</b>		
1. Roller support (Appui à rouleau)		
2. Cable or rod		
3. Pin support (Appui articulé)		
4. Cantilever support (fixed end) (Appui fixe)		

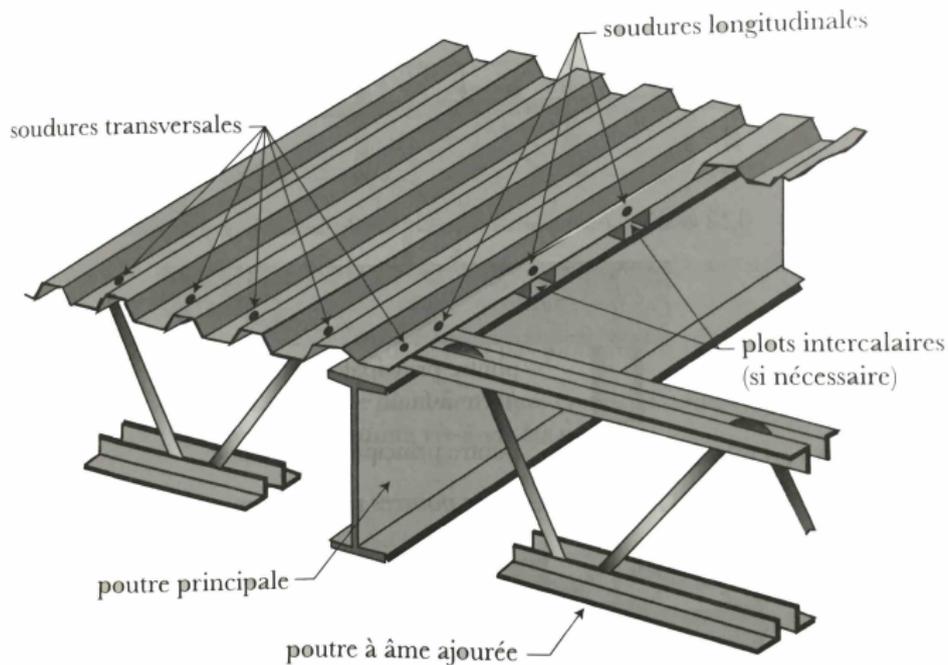
# Assemblages - 2D

CONNECTIONS – 2D			
7. Pinned connection			
8. Rigid connection (e.g., welded, bolted)			

# Cheminement des charges

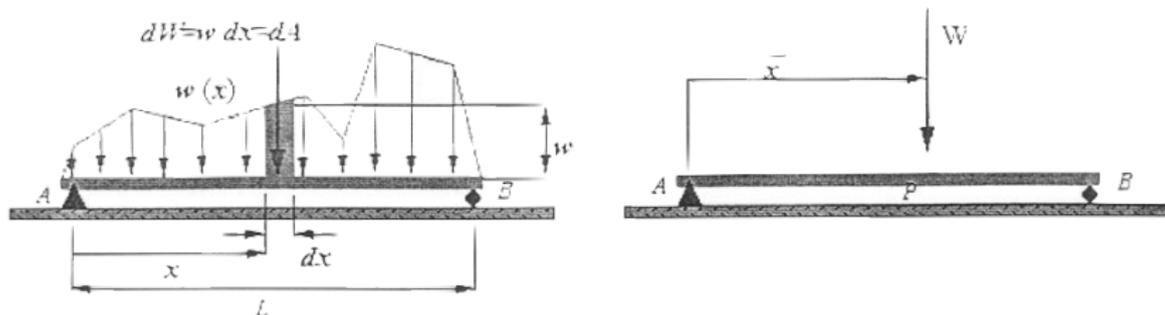


# Cheminement des charges



[Beaulieu et al., 2003]

# Charges équivalentes

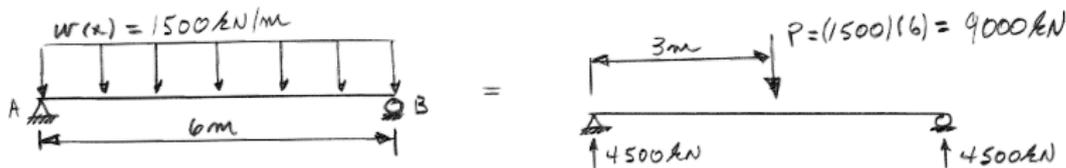


Calcul des réactions d'appuis



Calcul des efforts internes

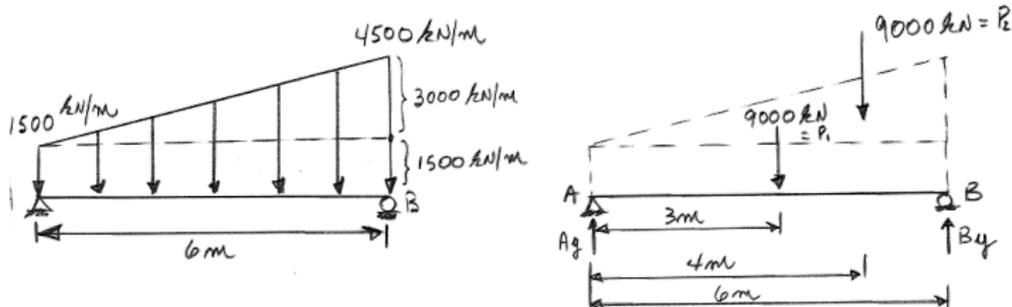
## Exemple – Charges équivalentes uniformes



$$P = 1500 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} = 9000 \text{ kN}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

## Exemple – Charges équivalentes triangulaires



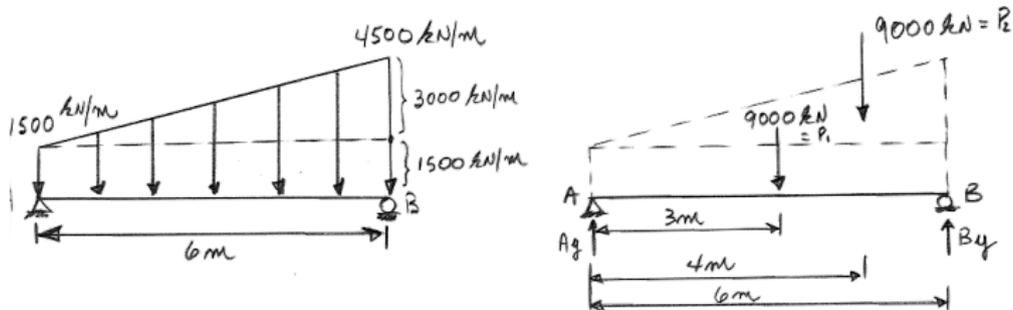
$$P_1 = 1500 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} = 9000 \text{ kN}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

$$P_2 = 3000 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{9000 \text{ kN}}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2}{3} \cdot 6 \text{ m} = \mathbf{3 \text{ m}}$$

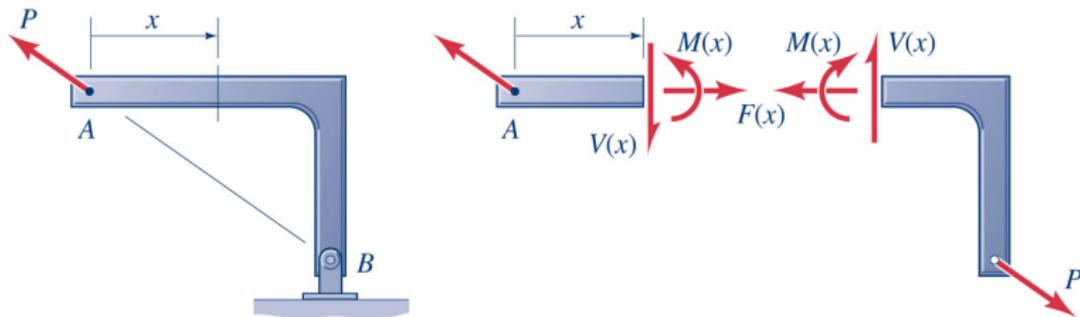
## Exemple – Charges équivalentes triangulaires



$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \begin{cases} B_y \cdot 6 \text{ m} - 9000 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 9000 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 0 \\ B_y = 10500 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \begin{cases} A_y - 9000 \text{ kN} - 9000 \text{ kN} + 10500 \text{ kN} = 0 \\ A_y = 7500 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$

# Diagramme de corps libre (DCL) - Efforts internes



(a) A two-force member.

(b) Internal resultants:  $F$ ,  $V$ , and  $M$ .

## Orientation des efforts ayant un signe positif

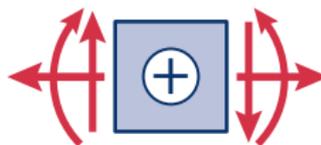


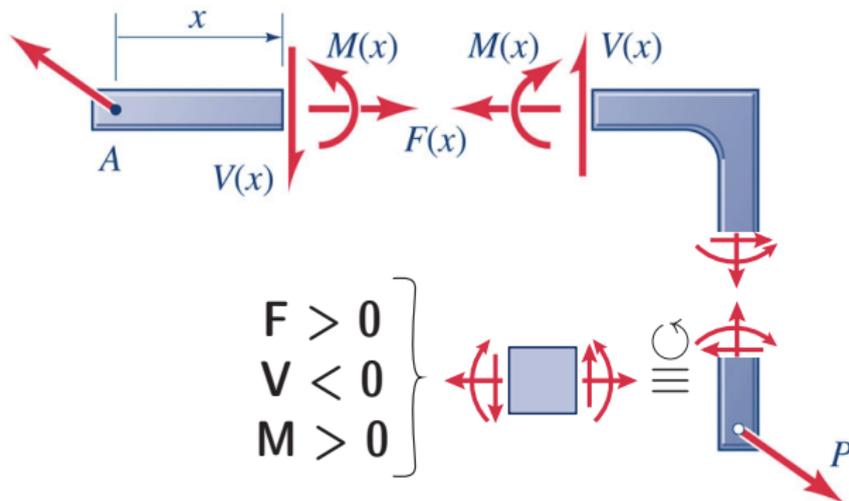
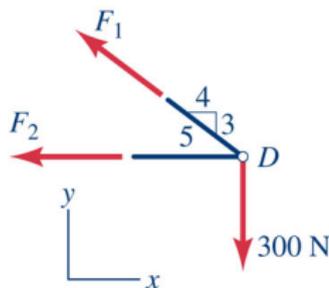
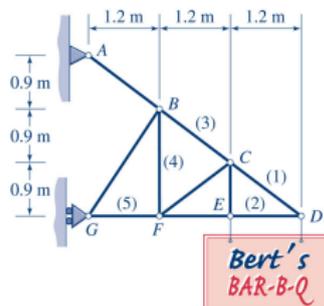
Diagramme de corps libre (DCL) - Exemple 

Diagramme de corps libre (DCL)  $\leftrightarrow \oplus$ 

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_y = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5}F_1 - 300N = 0 \\ F_1 = 500N (T) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 & \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{5}F_1 - F_2 = 0 \\ F_2 = -400N (C) \end{array} \right. \end{aligned}$$

1. Isoler le corps désiré
2. Indiquer tous les efforts agissant sur le corps

$$\text{Inconnus} \left\{ \begin{array}{l} \text{Efforts internes : } \leftrightarrow \oplus \\ \text{Réactions : } R_x = \rightarrow, R_y = \uparrow, M_z = \circlearrowright \end{array} \right.$$

3. Indiquer les dimensions géométriques
4. Équations d'équilibres (le corps isolé doit être en équilibre)

# Méthode des joints

3 étapes

1. Calculer les **réactions d'appuis** à partir de l'équilibre global

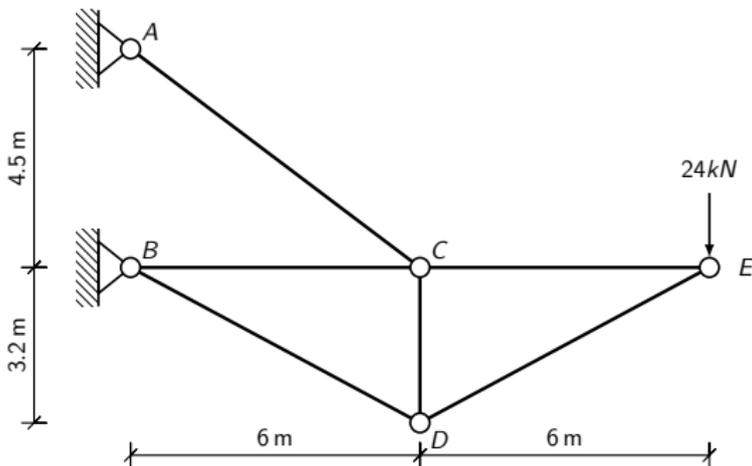
$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \sum F_x = 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \sum F_y = 0 \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \sum M_z = 0$$

2. Tracer le **DCL** pour chaque noeud (un à la fois)
3. Calculer les **forces inconnues** dans le DCL

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \sum F_x = 0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \sum F_y = 0$$

## Exemple – Méthode des joints

**Déterminer les efforts internes dans chaque membrure**



**Voir notes, Léger**

# Méthode des sections

4 étapes

1. Calculer les **réactions d'appuis** à partir de l'équilibre global

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 & \quad \uparrow \sum F_y = 0 & \quad \circlearrowleft \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

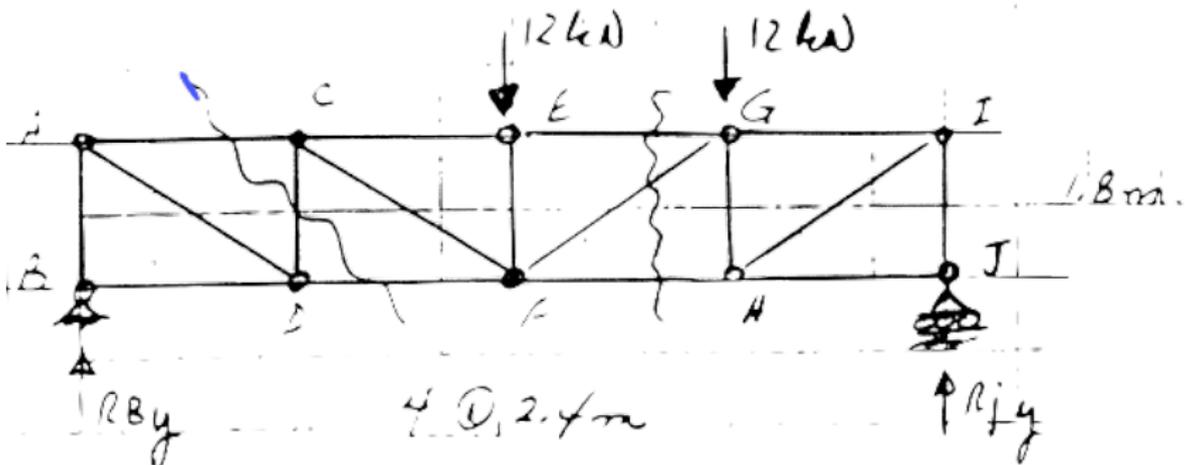
2. Faire une **coupe** passant par les membrures où les forces sont inconnues (maximum 3 inconnus)
3. Tracer le **DCL** pour la section isolée
4. Calculer les **forces inconnues** dans le DCL

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0 & \quad \uparrow \sum F_y = 0 \end{aligned}$$

**Permet de calculer les efforts internes dans un nombre restreint de membrures**

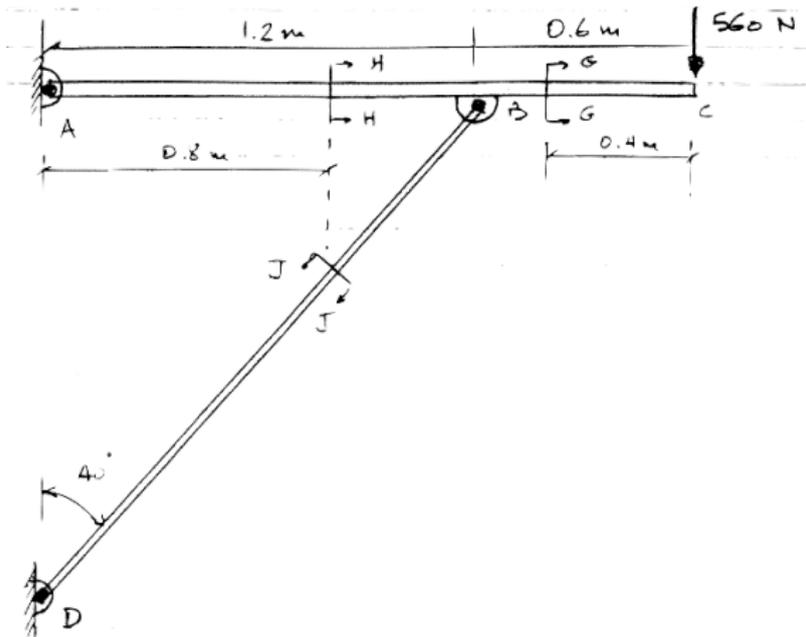
## Exemple – Méthode des sections

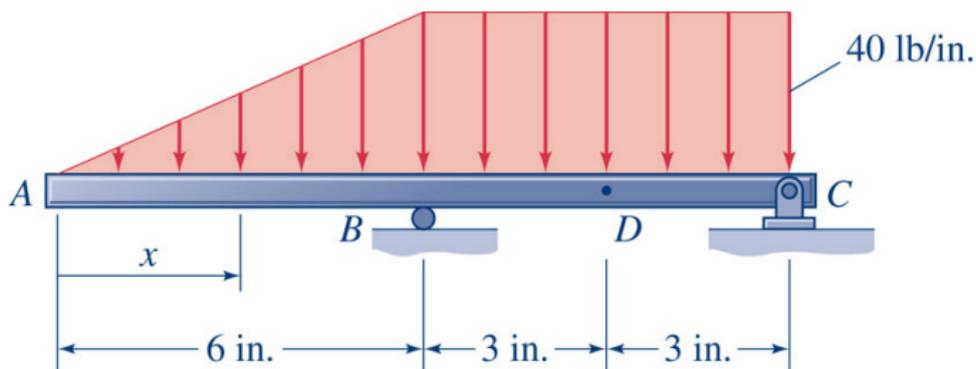
**Déterminer les forces dans les membrures AC, CD et DF**



## Exemple – Efforts internes

**Calculer les efforts internes ( $N$ ,  $V$ ,  $M$ ) à la section HH**



Exemple – Efforts internes II  

- ▶ Déterminer les efforts internes  $V(x)$  et  $M(x)$  pour  $0 \leq x \leq 6 \text{ in}$
- ▶ Déterminer les efforts internes  $V_D(9)$  et  $M_D(9)$

# Résumé – Module #1

**Hypothèses** : Matériau continu, homogène, isotrope

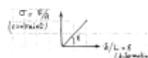
**Équations fondamentales** :

$$1. \text{Équilibre } \begin{matrix} \rightarrow \\ \uparrow \\ \circlearrowleft \end{matrix} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

2. Compatibilité des déformations



3. Loi constitutive (matériau)



**Calcul des efforts internes  $N$ ,  $V$ ,  $M$**  :

1. Commencer par trouver les réactions d'appuis (Éq. équilibre)

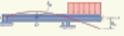
2. Diagramme de corps libre (DCL)



3. Méthode des joints ou des sections

4. Convention de signes

## Organisation de la matière

- 1 *Statique*
  - Équilibre des forces et moments
  - Diagrammes de corps libres 
  - 5 Diagramme des efforts,  $N(x)$ ,  $V(x)$ ,  $M(x)$
  
- 2 *Matériau*
  - Contraintes & déformations
  - Loi de Hooke, Poisson & St-Venant 
  
- Chargements*
  - 3 Efforts axiaux 
  - 4 Torsion 
  - 6a Flexion 
  - 6b Cisaillement 
  - 7 Déflexion 
  - 9 Pression & chargements combinés 
  
- États limites*
  - 7 Déflexion 
  - 8 Contraintes 2D-3D 
  - 10 Lois constitutives & critères de rupture 